

Variações no Integral de Riemann

Def.: Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$

$$B[v_1, \dots, v_n] \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=1}^n t_i v_i, 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) \doteq \text{Vol}(B[v_1, \dots, v_n])$$

$$\text{Vol}_0(v_1, \dots, v_n) \doteq \begin{cases} \text{Vol}(v_1, \dots, v_n) & \text{se } (v_1, \dots, v_n) \text{ base} \\ -\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) & \text{c.c.} \end{cases} \text{positiva de } \mathbb{R}^n$$

Obr.: Note que $2B[v_1, \dots, v_n] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=1}^n t_i v_i, 0 \leq t_i \leq 1 \text{ e } \exists j / t_j = 0 \text{ ou } t_j = 1 \right\} : \mu(\partial B) = 0.$

Prop.: Com as notas acima, tem-se

$$\text{Vol}_0(v_1, \dots, v_n) = \det[v_1, \dots, v_n]$$

Ídica da demonstração:

(i) $\text{Vol}_0(e_1, \dots, e_n) = 1$

(ii) Vol_0 é multilinear (logo multilinear alternada) #

→ usa-se que o integral de Riemann é invariante por transições.

Corolário : Seja $S = B[e_1, \dots, e_n]$ e

$\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear. Então $\text{vol}(\lambda(S)) = |\det \lambda|$.

Corolário : Seja $R \subset \mathbb{R}^n$ bloco fechado. Então,
se $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear, $\text{vol}(\lambda(R)) = |\det \lambda| \text{vol}(R)$

Dem.: Podemos supor, fazendo uma translação, se necessário, que 0 é um dos vértices de R . Então
 $\exists \lambda_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear t.q. $R = \lambda_1(S) \therefore \lambda(R) = \lambda \circ \lambda_1(S)$,
onde $\text{vol}(\lambda(R)) = |\det \lambda| \underbrace{|\det \lambda_1| \text{vol}(S)}_{\text{"vol}(R)} \neq$

Prop.: Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ dife home sua imagem,
 $R \subset U$ bloco fechado. Então $\text{vol}(f(R)) = \int_R |\det Jf|$

Lema: Seja $F = \text{id} + \phi : U \xrightarrow{C^1 \text{ home}} E$ λ -perturbação da
identidade, $0 < \lambda < 1$. Então, se B for uma bola fechada
de raio r em U , $F(B)$ contém uma bola fechada de raio
 $(1-\lambda)r$

Dem.: Sejam $B = B_r[a] \subset U$, $b = F(a) = a + \phi(a)$.

(3)

Para $y \in E$, seja $\tilde{f}_y: U \rightarrow E$ dado por

$$\tilde{f}_y(x) = y - F(x) + x = y - \phi(x). \text{ Ent\~{a} } \tilde{f}_y \text{ \textbf{\'e} }$$

uma λ -contra\~{c}o\~{e} ; j\~{a} vimos que, se $|\tilde{f}_y(a) - a| \leq (1-\lambda)r$, ent\~{a} $\tilde{f}_y: B_r[a] \hookrightarrow B_r[a]$. $\therefore \tilde{f}_y$ tem um \~{u}nico pts. fixo $x_0 \in B_r[a]$, donde $F(x_0) = y$. Mais, $|\tilde{f}_y(a) - a| \leq$

$$\leq (1-\lambda)r \Leftrightarrow |y - F(a)| \leq (1-\lambda)r \Leftrightarrow y \in B_{(1-\lambda)r}[F(a)],$$

$$\text{onde } B_{(1-\lambda)r}[F(a)] \subset F(B_r[a]). \quad \#$$

Dem. da prop.:

Suponha qe $R \subset \mathbb{R}^n$ seja um cubo. Seja $P \in \mathcal{P}(R)$ obtida pela subdivis\~{a}o de cada aresta de R em N subintervalos de mesmo comprimento; ent\~{a} $\mathcal{B}(P)$ ter\~{a} N^n cubos de mesma aresta, $(S_j)_{1 \leq j \leq N^n}$. Seja α_j o centro de S_j . Ten-~~re~~ : $\text{vol}(f(R)) = \sum_j \text{vol}(f(S_j))$. Investigamos, para cada j , $f(S_j)$.

Tome $C > 0$ / $(\forall x \in R) \|f'(x)^{-1}\| \leq C$. Para $\varepsilon > 0$, podemos tomar N suf. grande b.g. $\forall j, \forall x, y \in S_j$, $\|f'(x) - f'(y)\| < \varepsilon/C$. Logo, posto $\beta_j = f'(\alpha_j)^{-1}$, tem-se:

$$\forall j, \forall x, y \in I_j : \| \gamma_j \circ f'(x) - \gamma_j \circ f'(y) \| < \varepsilon \quad (5)$$

Em particular, $\xrightarrow{p/q = q_j} \forall j, \forall x \in I_j : \| \gamma_j \circ f'(x) - id \| < \varepsilon$

Se $\varepsilon < 1$, aplicando-se o lema anterior p/ $\mathbb{R}^n$ d/ a norma do sup., conclui-se que

$$(\forall j) \gamma_j \circ f(I_j) \supset \text{cubo de raio } (1-\varepsilon)(\text{raio de } I_j)$$

E, como $(\forall j, \forall x \in I_j) \| \gamma_j \circ f'(x) \| < (1+\varepsilon)$, tem-se

$$(\forall j) \gamma_j \circ f(I_j) \subset \text{cubo de raio } (1+\varepsilon)(\text{raio de } I_j)$$

Logo : $(\forall j) f'(a_j) \cdot \text{cubo de raio } (1-\varepsilon) \cdot (\text{raio de } I_j)$

$$\cap$$

$$f(I_j)$$

$$\cap$$

$$f'(a_j) \cdot \text{cubo de raio } (1+\varepsilon) \cdot (\text{raio de } I_j)$$

$$\text{Logo } (\forall j) (1-\varepsilon)^n | \det f'(a_j) | \text{vol}(I_j) \leq \text{vol } f(I_j) \leq (1+\varepsilon)^n | \det f'(a_j) | \text{vol}(I_j)$$

Assim, como $| \det f' |$ é limitada em $\mathbb{R}$, $\exists C_1 > 0$

t.q. $(\forall j) | \det f'(a_j) | \text{vol}(I_j) - \varepsilon C_2 \text{vol}(I_j) \leq \text{vol } f(I_j) \leq | \det f'(a_j) | \text{vol}(I_j) + \varepsilon C_2 \text{vol}(I_j)$

onde se conclui que

$$\sum_j |\det f'(a_j)| \operatorname{vol}(I_j) - \varepsilon C_1 \operatorname{vol}(R) \leq \operatorname{vol} f(R) \leq \sum_j |\det f'(a_j)| \operatorname{vol}(I_j) + \varepsilon C_1 \operatorname{vol}(R)$$

$$\therefore \underline{S}(|\det f'|, P) - \varepsilon C_1 \operatorname{vol}(R) \leq \operatorname{vol} f(R) \leq \bar{S}(|\det f'|, P) + \varepsilon C_1 \operatorname{vol}(R)$$

Como $|\det f'| \in \mathcal{R}$, conclui-se que:

$$\int_R |\det f'| - \varepsilon C_1 \operatorname{vol}(R) \leq \operatorname{vol} f(R) \leq \int_R |\det f'| + \varepsilon C_1 \operatorname{vol}(R)$$

Devido à arbitrariedade de ε conclui-se a tese. $\neq$

Obs.: Se R não for um cubo, basta alterar a norma em $\mathbb{R}^n$: Se R for um cubo ^{centrado em 0} de aresta $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_n$, tomamos $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sup \{ |a_i^{-1} x_i| : 1 \leq i \leq n \}$$

e qual será uma norma cuja bola unitária será R .

Basta apenas aplicar o argumento acima c/ esta norma.

Teorema: Sejam $R \subset \mathbb{R}^n$ bloco fechado, $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ difeomorfismo C^1 sobre sua imagem, $R \subset U$, $g: f(R) \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -integrável. Então $g \circ f: R \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{Q}$ e

$$\int_{f(R)} g = \int_R (g \circ f) |\det f'|$$

Dem.: Seja $P \in \mathcal{P}(R)$. Tem-se, $\forall S \in \mathcal{B}(P)$:

$$\int_S \inf_{f(S)} g \leq \int_{f(S)} g \leq \int_S \sup_{f(S)} g = \int_S \sup_{f(S)} g |\Delta_f| = M_S(g \circ f) |\Delta_f|$$

Seja $C > 0 / |\Delta_f| \leq C$ em R . Então $\int_S M_S |\Delta_f| - \int_S m_S |\Delta_f| \leq C(M_S - m_S) \text{vol}(S)$.
 $\therefore \sum_S \int_S M_S |\Delta_f| - \sum_S \int_S m_S |\Delta_f| \leq C(\bar{J}(g \circ f, P) - \underline{J}(g \circ f, P))$
 $\therefore$ Para $\varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}(R) / \sum_{S \in \mathcal{B}(P)} \int_S M_S (g \circ f) |\Delta_f| - \sum_{S \in \mathcal{B}(P)} \int_S m_S (g \circ f) |\Delta_f| < \varepsilon$.
 Por outro lado:

$$\sum_S \int_S m_S (g \circ f) |\Delta_f| \leq \underbrace{\sum_S \int_S (g \circ f) |\Delta_f|}_{\int_R (g \circ f) |\Delta_f|} \leq \sum_S \int_S M_S (g \circ f) |\Delta_f|$$

Para arbitrariamente ε , segue o tes. $\#$

Obt.: Se g tomar valores num Banach E , $g \in \mathcal{Q}$ e $(g \circ f) |\det f'| \in \mathcal{Q}$, então a tese do teorema também vale, como consequência do tes. de Mohr-Banach.

(7)

Corolário: Sejam $U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ lito C^1 sobre sua imagem, $X \subset U$ ^{compacto} J -mens. e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Então $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\int_{f(X)} g = \int_X (g \circ f) |\det f'|$.

Dem.: Suponha $JR \subset \mathbb{R}^n$ bloco fechado t.q. $X \subset JR^{C^1}$ e $\bar{g}: JR \rightarrow \mathbb{R}$ ext. de g , nubl. ^{para} $f(X)$.
Então

$$\begin{aligned} \int_{f(X)} \bar{g} &= \int_{JR} \bar{g} \circ f |\det f'| = \int_X \bar{g} \circ f |\det f'| \\ &= \int_X g \circ f |\det f'| \\ &= \int_{f(X)} g \end{aligned}$$

Se $J \neq \mathbb{R}$ como acima, cobrimos X com uma família finita de blocos fechados contidos em U cujos interiores sejam disjuntos. Seja $(R_j)_{1 \leq j \leq N}$ uma tal família (veja abaixo como construí-la). Então, denotando por $\bar{g}: \bigcup_{1 \leq i \leq N} f(R_i) \rightarrow \mathbb{R}$ a ext. de g nubl. para $f(X)$, segue-se do mesmo argumento acima que:

$$\begin{aligned} \int_{f(X)} g &= \int_{\bigcup_{1 \leq i \leq N} f(R_i)} \bar{g} = \sum_{i=1}^N \int_{f(R_i)} \bar{g} = \sum_{i=1}^N \int_{R_i} (\bar{g} \circ f) |\det f'| = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{R_i \cap X} (g \circ f) |\det f'| = \int_X (g \circ f) |\det f'|. \end{aligned}$$

Para construir a família finita $(R_j)_{1 \leq j \leq N}$:

(8)

Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ bloco fechado e.g. $X \subset \mathbb{R}$.

Tome $d = \text{dist}(X, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0$. ^{pois X compacto} Tome $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

tal que, $\forall B \in \mathcal{B}(P)$, $\text{diam } B < d$. Considere

$\mathcal{B} = \{ B \in \mathcal{B}(P) / B \cap X \neq \emptyset \}$; então $\mathcal{B}$ é um

conjunto finito de blocos fechados cujos interiores são disjuntos,

$X \subset \bigcup \mathcal{B}$ e $\forall B \in \mathcal{B}$, $B \subset U$. #

Corolário: Sejam $U \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $f: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ difeo

sobre $f(U)$, $X \subset U$ J -mensurável e.g. $\bar{X} \subset U$.

Se $g: f(X) \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}$, então $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{R}$

$$\text{e } \int_{f(X)} g = \int_X (g \circ f) | \det f' |$$

Pen.: $X \subset U$ J -mens. $\Rightarrow \bar{X} \overset{\text{compacto}}{J\text{-mens. cont.}} \text{ em } U$

Seja $\bar{g}: f(\bar{X}) \rightarrow \mathbb{R}$ ext. de g nula. Logo $\bar{g} \in \mathcal{R}$.

Como $\mu(f(\bar{X}) \setminus f(X)) = 0$ (pois $\text{int}(\bar{X} \setminus X) = \emptyset \therefore \text{int}(f(\bar{X}) \setminus f(X)) = \emptyset \therefore f(\bar{X}) \setminus f(X) \subset \partial(f(\bar{X}) \setminus f(X))$), tem-se $\bar{g} \in \mathcal{R}$ e

$$\int_{f(\bar{X})} \bar{g} = \int_{f(X)} g. \text{ Analogamente, } \int_X (g \circ f) | \det f' | = \int_{\bar{X}} (\bar{g} \circ f) | \det f' |$$

e, pelo corolário anterior, tem-se a igualdade q/ $\bar{g}$ é integrável em $\bar{X}$. #