



INSTITUTO
SUPERIOR
TÉCNICO

MAT5711 - Notas de Aula - Teorema de Stokes

④

Teorema (de Stokes): Sejam $M^m \subset \mathbb{R}^n$ sup.
de classe $C^{k \geq 1}$ com bordo, orientada,
 F esp. de Banach, $w \in \Omega_{m-1}^{(1)}(M, F)$ com
suporte compacto. Então, considerando em ∂M
a orientação induzida:

$$\int_{\partial M} w = \int_M dw$$

Lema: Com a mesma hipótese, se $\text{supp } w \cap \partial M = \emptyset$,
então $\int_M dw = 0$.

Dem.: Se $w = \sum_{i=1}^K w_i$ com $\text{supp } w_i \cap \partial M = \emptyset$ a tal vde p/ w_i ,
então $\int_M dw = \sum_{i=1}^K \int_M dw_i = 0$. Assim, usando par-
tições da unidade, é suficiente considerar o

caso em que $\text{supp } w \subset U$, com $\varphi: U_0 \rightarrow U \in$
 $\mathcal{A}(M)$ positiva e $U \cap \partial M = \emptyset$, $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ limitado.

Tome $a_1, \dots, a_m: U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 com sup. compacto

t.q. $\varphi^* w = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} a_i e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^i} \wedge \dots \wedge e^m$.

(2)

$$\text{Então } \oint^* dw = \oint \varphi^* w = \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x^i} e^1 \wedge \dots \wedge e^m$$

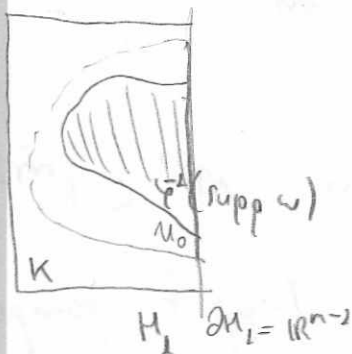
Tomar $K \supset U_0$ bloco fechado, $K = \prod_{i=1}^m [\alpha_i, \beta_i]$ e considerar a_i definida em K , $1 \leq i \leq m$, pondo $a_i = 0$ em $K \setminus U_0$. $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $K_i = [\alpha_i, \beta_i] \times \dots \times [\alpha_i, \beta_i] \times \dots \times [\alpha_m, \beta_m] \subset \mathbb{R}^{m-1}$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \int_M dw &= \sum_{i=1}^m \int_K \frac{\partial a_i}{\partial x^i} \stackrel{\text{Fubini}}{=} \sum_{i=1}^m \int_{K_i} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} \stackrel{\text{TFC}}{=} \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{K_i} \underbrace{[a_i(x_1, \dots, \beta_i, \dots, x_m) - a_i(x_1, \dots, \alpha_i, \dots, x_m)]}_{=0} \underbrace{dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_m}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

— x —

Prov. do teorema: SPG, podemos supor, usando um argumento padrão de partições da unidade, que $\text{supp } w \subset U$, com $\varphi: U_0 \rightarrow U \in A(M)$ positiva, $\varphi|_{U_0} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ limitado, e $\text{supp } w \cap \partial M = \emptyset$, tem-se $\int_M w = 0$ e $\int_M dw = 0$ pelo lema. Assim, basta considerar o caso em que $\text{supp } w \cap \partial M \neq \emptyset \therefore \partial U \neq \emptyset$.

Suponhamos $m = \dim M \geq 2$ (o caso $m=1$ fica como exercício). Podemos tomar, então, $U_0 \subset U_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / x_1 \leq 0\}$, de modo que $\varphi|_{\partial U_0}$ é parametrização positiva p/ ∂M , pela def. de orientação induzida no bordo. Tome $K \supset U_0$ bloco fechado, do forma $K = \prod_{i=1}^m [\alpha_i, \beta_i]$, com $\beta_1 = 0$, de modo que $K \subset U_1$.



Existem $a_1, \dots, a_m : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$

C^1 d/ suporte compacto t.q.

$$\varphi^* \omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} a_i e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^i} \wedge \dots \wedge e^m$$

$$\therefore \varphi^* d\omega = d\varphi^* \omega = \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x^i} e^1 \wedge \dots \wedge e^m$$

Estendamos $a_1, \dots, a_m$ para K , pondo-as 0 fora de U_0 . $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, eliminamos K_i como no lema.

Tem-se :

$$1.) \quad \varphi|_{\partial U_0}^* \omega = a_1(0, x_2, \dots, x_m) e^2 \wedge \dots \wedge e^m$$

$$\therefore \int_{\partial M} \omega = \int_{K_1} a_1(0, x_2, \dots, x_m) dx_2 \dots dx_m$$

$$2.1 \int_M \omega = \sum_{i=1}^m \int_K \frac{\partial \alpha_i(x)}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_m \quad \text{Fubini}$$

$$= \sum_{i=1}^m \int_{K_i} \left[\int_{d_i}^{\beta_i} \frac{\partial \alpha_i(x)}{\partial x_i} dx_i \right] dx_1 \dots dx_{i-1} \dots dx_m =$$

$$\underbrace{\alpha_i(x_1, \dots, \beta_i, \dots, x_m)}_{=0 \text{ se } i \neq 1} - \underbrace{\alpha_i(x_1, \dots, d_i, \dots, x_m)}_{=0}$$

$$= \int_{K_1} \alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_2 \dots dx_m \stackrel{(1)}{=} \int_M \omega \quad \neq$$

— x —

Corolário [tes. da divergência]: Sejam $M^m \subset \mathbb{R}^m$ sup. C^1 d/ bordo e $F: M \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ com $\text{supp } F$ compacto. Ent:

$$\int_{\partial M} \langle F, \nu \rangle dS = \int_M \text{div } F$$

onde ν normal unitária externa $\partial M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dem.: Se $F = (F_1, \dots, F_m)$, tem-se:

$$\langle F, \nu \rangle dS = i_F(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} F_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m$$

$$\therefore d(\langle F, \nu \rangle dS) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = (\text{div } F) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

$\therefore$ basta aplicar Stokes

Teorema de Stokes em Cadeias

Definição e notação:

- $[0, 1]^n = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ ^{n fatores}
- Dada $M^n \subset \mathbb{R}^p$ superfície de classe C^{k+1} ,
um cubo singular de dim n em M é uma
aplicação contínua $c: [0, 1]^n \rightarrow M$. Se c
for de classe C^k (i.e. se for a restrição de
uma aplicação $U \xrightarrow{C^k} M$, onde U vizinhança
aberta de $[0, 1]^n$ em $\mathbb{R}^n$), diz-se que é
um cubo singular C^k .
- $I^n: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ inclusão chama-se cubo unitário
n-dimensional.
- Uma n-cadeia em M é um elemento do
Grupo abeliano livre gerado por $\{c: [0, 1]^n \rightarrow M /$
 $c \text{ contínua}\} = \{\text{cubos sing. em } M\}$. Ou seja,
é uma soma formal de cubos sing. e o integral da forma
 $c = \sum_{i=1}^K n_i c_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$ e c_i cubos sing.
- Uma n-cadeia C^k em M é um elemento do
Grupo abeliano livre gerado por $\{\text{cubos sing. } C^k \text{ em } M\}$.

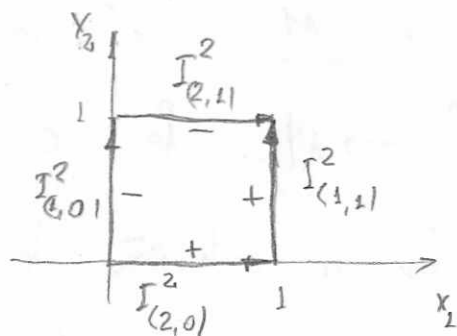
• Para $n \in \mathbb{N}$ / p / $1 \leq i \leq n$ definimos as cubos sing. de dim $(n-1)$:

$$I_{(i,0)}^n : [0,1]^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{é a face } (i,0) \text{ de } I^n$$

$$x \longmapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

$$I_{(i,1)}^n : [0,1]^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{é a face } (i,1) \text{ de } I^n$$

$$x \longmapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1})$$



• Definimos, agora:

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n \sum_{d=0}^1 (-1)^{i+d} I_{(i,d)}^n$$

é a fronteira de I^n ou borda de I^n

• Para $c : [0,1]^n \longrightarrow M$ e $1 \leq i \leq n$

$$c_{(i,0)} = c \circ I_{(i,0)}^n \quad \text{é a face } (i,0) \text{ de } c$$

$$c_{(i,1)} = c \circ I_{(i,1)}^n \quad \text{a a a } (i,1) \text{ a a}$$

$$\partial c = \sum_{i=1}^n \sum_{d=0}^1 (-1)^{i+d} c_{(i,d)} \quad \text{é o } \underline{\text{borda}} \text{ de } c$$

Finalmente, se $c = \sum_{i=1}^k n_i c_i$ for uma n -cátia sing.

em M , o borda de c é:

$$\partial c = \sum_{i=1}^k n_i \partial c_i$$



prop.: $\partial^2 = 0$ (i.e. se c for uma n -cadeia em M , $\partial(\partial c) = 0$).

Dem.: exercício.

Def. [integração em cadeias]:

- Sejam M superfície de classe $C^{k \geq 1}$, $c: [0,1]^n \rightarrow M$ um cubo singular C^1 , F esp. de Banach e $\omega \in \Omega_n^{(col)}(M, F)$. Definimos:

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^n} c^* \omega$$

- Se, com a notação acima, $c = \sum_{i=1}^K n_i c_i$ for uma n -cadeia singular C^1 em M , definimos:

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^K n_i \int_{c_i} \omega$$

Obs.: se $n=0$, $[0,1]^0 = \{0\} = \mathbb{R}^0$ e

$$\int_{\sum_{i=1}^K n_i c_i} \omega = \sum_{i=1}^K n_i \omega(c_i(0)) \quad \text{p/ uma 0-forma } \omega.$$

Teorema de Stokes :

Sejam M superfície $C^{k \geq 2}$, F Banach, $n \in \mathbb{N}$,
 $\omega \in \mathcal{R}_{n-1}^{(1)}(M, F)$, c uma n -cadeia singular C^2 .

$$\text{Então: } \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Dem.:

1.) É suficiente considerar o caso em que c é um cubo singular. Com efeito, se o teorema valer p/ cubos e $c = \sum_{i=1}^k n_i c_i$, tem-se:

$$\int_c d\omega = \sum_i n_i \int_{c_i} d\omega = \sum_i n_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

2.) Supomos, em vista de (1), $c: [0,1]^n \xrightarrow{C^2} M$.

Lema (trivial): $\forall \alpha \in \mathcal{R}_{n-1}^{(1)}(M, F)$, $\int_{\partial c} \alpha = \int_{\partial I^n} c^* \alpha$.

Em vista do lema, é suficiente considerar o caso em que $c = I^n$. Com efeito, se o teorema valer p/ I^n , tem-se:

$$\int_c d\omega = \int_{I^n} c^* d\omega = \int_{I^n} d(c^* \omega) \stackrel{\text{lema}}{=} \int_{\partial I^n} c^* \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

3.) Supomos, em vista de (3), $c = I^n$ e $\omega \in \mathcal{R}_{n-1}^{(1)}(U, F)$, onde U viz. aberta de $[0,1]^n$ em $\mathbb{R}^n$.

$$\exists! f_i : M \xrightarrow{C} F, \quad p/ 1 \leq i \leq n, \quad \text{t.q.}$$

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i \underbrace{e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^i} \wedge \dots \wedge e^n}_{= \omega_i}$$

$$\therefore d\omega = \left[\sum_{i=1}^n D_i(f_i) \right] e^1 \wedge \dots \wedge e^n = \sum_{i=1}^n d\omega_i$$

$$(d\omega_i = D_i(f_i) e^1 \wedge \dots \wedge e^n)$$

É suficiente, pois, verificar $\int_{\partial I^n} \omega_i = \int_{I^n} d\omega_i$,
p/ $1 \leq i \leq n$.

Fixe $j \in \{1, \dots, n\}$. Tem-se, p/ $1 \leq i \leq n$, $\alpha \in \{0, 1\}$:

$$(I_{(\alpha, \alpha)}^n)^* f_j e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^\alpha} \wedge \dots \wedge e^n = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ f_j \circ I_{(j, \alpha)}^n e^1 \wedge \dots \wedge e^{n-1}, & i = j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{\partial I^n} \omega_j &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{n-1}} (I_{(\alpha, \alpha)}^n)^* \omega_j = \\ &= \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{2j+\alpha-1} \int_{[0,1]^{n-1}} f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha, x_{j+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{n-1} = \\ &= \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{\alpha+1} \int_{[0,1]^{n-1}} f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha, x_{j+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n \quad (*) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{I^n} d\omega_j = \int_{I^n} D_j(f_j) dx_1 \dots dx_n \stackrel{\text{T. Fubini}}{=} \int_0^1 \dots \left[\int_0^1 D_j(f_j) dx_j \right] dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n =$$

$$\stackrel{\text{TFC}}{=} \int_{[0,1]^{n-1}} [f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_j(x_1, \dots, 0, \dots, x_n)] dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n =$$

$$= (\#) = \int_{\partial J^n} w_j \quad \#$$

6

Exemplo : Sejam M superfície C^2 ; F Banach;

$w \in \Omega_1^{(1)}(M, F)$ fechada; $\alpha, \beta : [0, 1] \xrightarrow{C^2} M$

homotópicas ^{em classe C^2 (com extremos fixos)}. Então $\int_{\alpha} w = \int_{\beta} w$.

Com efeito, seja $H : [0, 1]^2 \xrightarrow{C^2} M$ l.g.

$$\underbrace{H|_{\{0\} \times [0, 1]}}_{\cong H_0 I_{(1,0)}^2} = \alpha, \quad \underbrace{H|_{\{1\} \times [0, 1]}}_{\cong H_0 I_{(1,1)}^2} = \beta, \quad \begin{cases} H_0 I_{(2,0)}^2 = \text{cte.} = \alpha(0) = \beta(0) \\ H_0 I_{(2,1)}^2 = \text{cte.} = \alpha(1) = \beta(1) \end{cases}$$

$$\text{Tem-se : } \partial H = \sum_{i=0}^2 \sum_{a=0}^1 (-1)^{i+a} \underbrace{H_{(i,a)}}_{\cong H_0 I_{(i,a)}^2} = \alpha - \beta - \underbrace{\alpha(0)}_{\substack{\text{i.e. caminho cte.} \\ = \alpha(0)}} + \beta(0)$$

$$0 = \int_H dw \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial H} w = \int_{\alpha} w - \int_{\beta} w \quad \#$$