

MAT5711 - Cálculo Avançado - Notas de Aula

26 de março de 2010

§1. INTEGRAL DE RIEMANN EM ESPAÇOS DE BANACH

DEFINIÇÃO 1.1 (Integral de Riemann). *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e E um espaço de Banach. A noção de Riemann-integrabilidade de funções limitadas $[a, b] \rightarrow E$ se define através de somas de Riemann, da maneira usual:*

1. Uma partição de $[a, b]$ é um conjunto finito $P \subset [a, b]$ tal que $a, b \in P$. Se $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ com $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, o intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, para $1 \leq i \leq n$, chama-se i -ésimo intervalo da partição, e $|P| \doteq \max\{|t_i - t_{i-1}| : 1 \leq i \leq n\}$ chama-se norma da partição. Um pontilhamento da partição P é uma n -upla $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ tal que $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para $1 \leq i \leq n$; o par (P, ξ) chama-se partição pontilhada.
2. Seja $f : [a, b] \rightarrow E$ limitada. A soma de Riemann de f com relação a uma partição pontilhada (P, ξ) de $[a, b]$, onde $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, é o elemento de E dado por:

$$S(f, P, \xi) \doteq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \quad (1)$$

3. Diz-se que uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow E$ é Riemann-integrável e que a sua integral de Riemann é $L \in E$ (NOTAÇÃO: $\int_a^b f = L$) se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para toda partição pontilhada (P, ξ) de $[a, b]$ com $|P| < \delta$, tem-se $\|S(f, P, \xi) - L\| < \epsilon$.

DEFINIÇÃO 1.2 (Conjuntos Dirigidos). *Um conjunto dirigido é um par $(A, \leq)$, onde A é um conjunto não-vazio e $\leq$ é uma relação de ordem parcial em A (i.e. uma relação binária reflexiva ($a \leq a$), anti-simétrica ($a \leq b$ e $b \leq a$ implicam $a = b$) e transitiva ($a \leq b$ e $b \leq c$ implicam $a \leq c$)) tal que, $\forall a, b \in A$, $\exists c \in A$ tal que $a \leq c$ e $b \leq c$.*

DEFINIÇÃO 1.3 (Nets). *Se A for um conjunto dirigido e X um conjunto, um net em X , indexado por A , é uma aplicação $s : A \rightarrow X$. Mais geralmente, um net multivalorado em X , indexado por A , é uma aplicação $s : A \rightarrow 2^X$ que associa cada $\alpha \in A$ a um subconjunto não vazio $s_\alpha \subset X$. Usa-se a notação $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$ ou $(s_\alpha)_\alpha$ ou (s_α) para denotar o net.*

Nestas notas, por um net entenda-se um net multivalorado. Uma boa referência sobre este assunto, caso queira entrar em mais detalhes, é o livro clássico de Topologia Geral do John Kelley, [2] (vide capítulo 2, *Moore-Smith Convergence*).

Exemplo 1.4. 1. O conjunto dos naturais $\mathbb{N}$, munido da relação de ordem usual $\leq$, é um conjunto dirigido. Assim, toda sequência é um net (univalorado).

2. Num espaço topológico (X, τ) , tome $p \in X$ e A o conjunto das vizinhanças de p . Dados $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in A$, define-se $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ por $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$; então $\leq$ é uma relação de ordem parcial em A , munido da qual se torna um conjunto dirigido. A inclusão $\mathcal{U} \in A \mapsto \mathcal{U} \in 2^X$ é um net — o net das vizinhanças de p .

3. Sejam $[a, b]$ um intervalo e $\mathcal{P}$ o conjunto das partições de $[a, b]$. Dados $P, Q \in \mathcal{P}$, define-se $P \leq Q$ se Q for mais fina que P ,

i.e. se $P \subset Q$. Isto define uma relação de ordem parcial em $\mathcal{P}$, munido da qual se torna um conjunto dirigido. Dados E espaço de Banach e $f : [a, b] \rightarrow E$ limitada, o net das somas de Riemann de f , $(S(f)_P)_{P \in \mathcal{P}}$, é o net $S(f) : \mathcal{P} \rightarrow 2^E$ dado por $P \mapsto \{S(f, P, \xi) \mid \xi \text{ pontilhamento de } P\}$, onde $S(f, P, \xi)$ é dado por (1).

DEFINIÇÃO 1.5 (Nets Convergentes). *Sejam (X, τ) um espaço topológico, $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$ um net em X e $x_0 \in X$. Diz-se que $(s_\alpha)_\alpha$ converge para x_0 (NOTAÇÃO: $s_\alpha \rightarrow x_0$) se, para toda vizinhança $\mathcal{U}$ de x_0 , existir $\alpha_0 \in A$ tal que, $\forall \alpha \geq \alpha_0$, $s_\alpha \subset \mathcal{U}$.*

Exemplo 1.6. Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$, E espaço de Banach e $f : [a, b] \rightarrow E$ limitada. Então f é Riemann-integrável e $\int_a^b f = L \in E$ se, e somente se, o net $(S(f)_P)_{P \in \mathcal{P}}$ das somas de Riemann de f , definido no exemplo 1.4, converge para L .

DEFINIÇÃO 1.7 (Ponto de Aderência de um Net). *Sejam (X, τ) um espaço topológico, $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$ um net em X e $x_0 \in X$. Diz-se que x_0 é um ponto de aderência de $(s_\alpha)_\alpha$ se, para toda vizinhança $\mathcal{U}$ de x_0 e para todo $\alpha_0 \in A$, existir $\alpha \geq \alpha_0$ tal que $s_\alpha \subset \mathcal{U}$ (i.e. o conjunto dos índices $\alpha \in A$ tais que $s_\alpha \subset \mathcal{U}$ é cofinal em A).*

EXERCÍCIO 1.8. *Sejam X, Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ e $x_0 \in X$. Mostre que são equivalentes:*

1. f é contínua em x_0 (i.e. a pré-imagem de toda vizinhança de $f(x_0)$ é uma vizinhança de x_0);
2. para todo net $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$ convergente para x_0 , $(f(s_\alpha))_{\alpha \in A}$ converge para $f(x_0)$.

EXERCÍCIO 1.9. *Seja X um espaço topológico Hausdorff (i.e. no qual quaisquer dois pontos distintos admitem vizinhanças disjuntas). Se $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$ for um net convergente em X , então o seu limite $x_0 \in X$ é o único ponto de aderência de $(s_\alpha)_\alpha$; em particular, o limite é único.*

Introduzir-se-á, a seguir, a noção de *net de Cauchy* num espaço métrico. A definição faz sentido, no entanto, num contexto mais geral: o de um espaço topológico munido de uma *estrutura uniforme*.

DEFINIÇÃO 1.10 (Nets de Cauchy). *Sejam (X, d) um espaço métrico e $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$ um net em X . Diz-se que $(s_\alpha)_\alpha$ é um net de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\alpha_0 \in A$ tal que, $\forall \alpha', \alpha'' \in A$, $\alpha' \geq \alpha_0$ e $\alpha'' \geq \alpha_0$, tem-se $d(x', x'') < \epsilon$ se $x' \in s_{\alpha'}$ e $x'' \in s_{\alpha''}$.*

PROPOSIÇÃO 1.11. *Se (X, d) for um espaço métrico completo, todo net de Cauchy em X é convergente.*

Demonstração. Seja $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$ net de Cauchy em X . Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $\alpha_n \in A$ tal que $\forall \alpha', \alpha'' \in A$, $\alpha' \geq \alpha_n$ e $\alpha'' \geq \alpha_n$, tem-se $d(x', x'') < \frac{1}{n}$ se $x' \in s_{\alpha'}$ e $x'' \in s_{\alpha''}$, e tal que $\alpha_n \leq \alpha_m$ se $n \leq m$ (a construção se faz indutivamente: uma vez escolhido α_n , toma-se $\alpha \in A$ que satisfaça a condição de Cauchy para $\epsilon = \frac{1}{n+1}$ e então toma-se $\alpha_{n+1} \in A$ tal que $\alpha_{n+1} \geq \alpha$ e $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$). Agora tome, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in s_{\alpha_n}$. A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ assim definida é de Cauchy, pois $d(x_n, x_m) < \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}$. Como (X, d) é completo, existe $x_0 \in X$ tal que $x_n \rightarrow x_0$. Afirimo que $s_\alpha \rightarrow x_0$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon/2$. Tome $m \geq n_0$ tal que $d(x_m, x_0) < \epsilon/2$. Então, para todo $\alpha \in A$ com $\alpha \geq \alpha_{n_0}$, se $x \in s_\alpha$: (1) como $\alpha \geq \alpha_{n_0}$ e $\alpha_m \geq \alpha_{n_0}$, tem-se $d(x, x_m) < \frac{1}{n_0} < \epsilon/2$ e (2) $d(x_m, x_0) < \epsilon/2$, donde $d(x, x_0) \leq d(x, x_m) + d(x_m, x_0) < \epsilon$. $\square$

TEOREMA 1.12. *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$, E espaço de Banach e $f : [a, b] \rightarrow E$ contínua. Então f é Riemann-integrável.*

Demonstração. Em vista da proposição 1.11, basta provar que o net $(S(f)_P)_{P \in \mathcal{P}}$ das somas de Riemann de f é um net de Cauchy. Seja $\epsilon > 0$. Como $[a, b]$ é compacto, f é uniformemente contínua; assim, podemos tomar $\delta > 0$ tal que, se $x, x' \in [a, b]$ e $|x - x'| < \delta$, tem-se $\|f(x) - f(x')\| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Tome $P_0 \in \mathcal{P}$ com $|P_0| < \delta$. Dadas $P' = \{t'_0 < \dots < t'_n\}, P'' \in \mathcal{P}$ tais que $P_0 \leq P', P_0 \leq P''$, afirimo que, para todo pontilhamento ξ' de P' e para todo pontilhamento ξ''

de P'' , tem-se $\|S(f, P', \xi') - S(f, P'', \xi'')\| < \epsilon$. Com efeito, sejam $P \in \mathcal{P}$ tal que $P' \leq P$ e $P'' \leq P$ (por exemplo, tome $P = P' \cup P''$), e ξ um pontilhamento qualquer de P . Todo subintervalo $[t'_{i-1}, t'_i]$ de P' é união de um número finito de subintervalos de P , digamos, de $[t_{j-1}, t_j]$ para $r_i \leq j \leq s_i$. Ora, para $r_i \leq j \leq s_i$, $\xi'_i, \xi_j \in [t'_{i-1}, t'_i]$, logo $|\xi'_i - \xi_j| < \delta$. Portanto, $\|S(f, P', \xi') - S(f, P, \xi)\| = \|\sum_{i=1}^n (\sum_{j=r_i}^{s_i} [f(\xi'_i) - f(\xi_j)](t_j - t_{j-1}))\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=r_i}^{s_i} \|f(\xi'_i) - f(\xi_j)\|(t_j - t_{j-1}) < \sum_{i=1}^n \sum_{j=r_i}^{s_i} \frac{\epsilon}{2(b-a)} (t_j - t_{j-1}) = \epsilon/2$. Analogamente, $\|S(f, P'', \xi'') - S(f, P, \xi)\| < \epsilon/2$; donde, pela desigualdade triangular, $\|S(f, P', \xi') - S(f, P'', \xi'')\| < \epsilon$, como afirmado. $\square$

Mais geralmente, vale o seguinte teorema — uma das implicações contidas no enunciado do clássico teorema de Lebesgue, que dá uma condição necessária e suficiente para Riemann-integrabilidade de funções $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (ou, mais geralmente, $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$). Não vale a recíproca deste teorema, i.e. existem espaços de Banach de dimensão infinita E e funções Riemann-integráveis $[a, b] \rightarrow E$ cujo conjunto dos pontos de descontinuidade não tem medida de Lebesgue zero (vide exemplos em [1]).

TEOREMA 1.13. *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$, E espaço de Banach e $f : [a, b] \rightarrow E$ limitada. Suponha que o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tenha medida nula. Então f é Riemann-integrável.*

Demonstração. Mostremos que o net das somas de Riemann de f é de Cauchy. Com efeito, seja $\epsilon > 0$. Tome $M > 0$ tal que $\|f\| \leq M$ em $[a, b]$. Podemos encontrar uma família finita de intervalos $(I_i)_{1 \leq i \leq n}$ tal que: (1) para $1 \leq i \leq n$, I_i é aberto em $[a, b]$, i.e. da forma (a_i, b_i) ou $[a, b_i)$ ou $(a_i, b]$, onde $a_i, b_i \in [a, b]$; (2) $\sum_{i=1}^n |I_i| < \epsilon/8M$, onde $|I_i|$ denota o comprimento do intervalo I_i ; (3) denotando por $D \subset [a, b]$ o conjunto dos pontos de descontinuidade de f , tem-se $D \subset \cup_{1 \leq i \leq n} I_i$. Como $\cup_{1 \leq i \leq n} I_i$ é aberto em $[a, b]$, o seu complementar $F \doteq [a, b] \setminus \cup_{1 \leq i \leq n} I_i$ é fechado em $[a, b]$, portanto compacto; sendo f contínua no compacto F , é uniformemente contínua, logo existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon/4(b-a)$ se $x, y \in F$ e $|x - y| < \delta$. F é uma união finita de subintervalos

fechados de $[a, b]$; em cada um destes intervalos, escolha uma partição com norma menor que δ , e seja P_0 a partição de $[a, b]$ formada pela união de todas estas partições e dos extremos a_i, b_i dos intervalos I_i , $1 \leq i \leq n$. Dadas $P', P'' \in \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ denota o conjunto dirigido das partições de $[a, b]$) tais que $P_0 \leq P'$, $P_0 \leq P''$, afirmo que, para todo pontilhamento ξ' de P' e para todo pontilhamento ξ'' de P'' , tem-se $\|S(f, P', \xi') - S(f, P'', \xi'')\| < \epsilon$. Com efeito, seja $P \in \mathcal{P}$ tal que $P' \leq P$ e $P'' \leq P$, e ξ um pontilhamento qualquer de P . Digamos, $P = \{t_0 < \dots < t_q\}$. Como a partição $P' = \{t'_0 < \dots < t'_m\}$ refina P_0 , todo subintervalo $[t'_{j-1}, t'_j]$ de P' está contido em algum intervalo I_i , $1 \leq i \leq n$, ou no complementar F da união dos I_i em $[a, b]$; usaremos um subscrito 1 para denotar os índices que se referem aos intervalos do primeiro tipo e um subscrito 2 para os do segundo. Assim, pomos $J_1 \doteq \{j_1 \in \{1, \dots, m\} \mid \exists i, [t'_{j_1-1}, t'_{j_1}] \subset I_i\}$ e $J_2 \doteq \{j_2 \in \{1, \dots, m\} \mid [t'_{j_2-1}, t'_{j_2}] \subset F\}$, de modo que $\{1, \dots, m\}$ seja a união disjunta de J_1 e J_2 , donde $S(f, P', \xi') = \sum_{j_1 \in J_1} f(\xi'_{j_1})(t'_{j_1} - t'_{j_1-1}) + \sum_{j_2 \in J_2} f(\xi'_{j_2})(t'_{j_2} - t'_{j_2-1})$. Todo subintervalo $[t'_{j_1-1}, t'_{j_1}]$ de P' é união de um número finito de subintervalos de P , digamos, de $[t_{k-1}, t_k]$ para $r_{j_1} \leq k \leq s_{j_1}$. Ora, para $j_1 \in J_1$ e $r_{j_1} \leq k \leq s_{j_1}$, $\xi'_{j_1}, \xi_k \in [t'_{j_1-1}, t'_{j_1}]$, logo $|\xi'_{j_1} - \xi_k| < \delta$ e $\xi'_{j_1}, \xi_k \in F$, donde $\|f(\xi'_{j_1}) - f(\xi_k)\| < \epsilon/4(b-a)$. Por outro lado, para $j_1 \in J_1$ e $r_{j_1} \leq k \leq s_{j_1}$, tem-se $\|f(\xi'_{j_1}) - f(\xi_k)\| < 2M$. Assim, sendo a soma dos comprimentos dos intervalos $[t'_{j_1-1}, t'_{j_1}]$, $j_1 \in J_1$, menor que $\epsilon/8M$, conclui-se que $\|S(f, P', \xi') - S(f, P, \xi)\| = \|\sum_{j=1}^m (\sum_{k=r_j}^{s_j} [f(\xi'_j) - f(\xi_k)](t_k - t_{k-1}))\| = \|\sum_{j_1 \in J_1} \sum_{k=r_{j_1}}^{s_{j_1}} [f(\xi'_{j_1}) - f(\xi_k)](t_k - t_{k-1}) + \sum_{j_2 \in J_2} \sum_{k=r_{j_2}}^{s_{j_2}} [f(\xi'_{j_2}) - f(\xi_k)](t_k - t_{k-1})\| \leq 2M \frac{\epsilon}{8M} + \frac{\epsilon}{4(b-a)} (b-a) = \epsilon/2$. Analogamente, $\|S(f, P'', \xi'') - S(f, P, \xi)\| < \epsilon/2$; donde, pela desigualdade triangular, $\|S(f, P', \xi') - S(f, P'', \xi'')\| < \epsilon$, como afirmado. $\square$

Serão provadas, a seguir, propriedades usuais da integral de Riemann.

PROPOSIÇÃO 1.14. *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e E espaço de Banach. Tem-se:*

1. *Dados $c \in]a, b[$ e $f : [a, b] \rightarrow E$ limitada, então f é Riemann-integrável se, e somente se, as restrições de f a $[a, c]$ e $[c, b]$ o forem; em caso afirmativo, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*
2. *Se $f : [a, b] \rightarrow E$ for Riemann-integrável e $M \geq 0$ for tal que $\|f\| \leq M$, então $\|\int_a^b f\| \leq M(b-a)$. Se $\|f\| : [a, b] \rightarrow E$ também for Riemann-integrável, então $\|\int_a^b f\| \leq \int_a^b \|f\|$.*
3. *Seja $\mathcal{R}([a, b], E) \doteq \{f : [a, b] \rightarrow E \mid f \text{ Riemann-integrável}\}$. Então $\mathcal{R}([a, b], E)$ é um subespaço fechado do espaço de Banach $\mathcal{B}([a, b], E)$ das funções limitadas $[a, b] \rightarrow E$ (vide notas sobre espaços métricos, página 6, exemplo 2.2.5). Dados $f, g \in \mathcal{R}([a, b], E)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ e $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$. Além disso, $\int_a^b \cdot : \mathcal{R}([a, b], E) \rightarrow E$ é um operador linear contínuo.*
4. *Sejam F espaço de Banach e $T : E \rightarrow F$ operador linear contínuo. Então, se $f \in \mathcal{R}([a, b], E)$, tem-se $T \circ f \in \mathcal{R}([a, b], F)$ e $\int_a^b (T \circ f) = T \cdot \int_a^b f$.*

Demonstração. 1. Seja $P_0 = \{a, c, b\}$. O net $\{S(f)_P\}_{P \geq P_0}$ é a imagem pela aplicação contínua $+$: $E \times E \rightarrow E$ do net $(S(f)|_{[a, c]})_{P'}, (S(f)|_{[c, b]})_{P''}$, onde $(S(f)|_{[a, c]})_{P'}$ e $(S(f)|_{[c, b]})_{P''}$ denotam, respectivamente, os nets das somas de Riemann das restrições de f a $[a, c]$ e $[c, b]$. Como uma aplicação contínua leva nets convergentes em nets convergentes, conclui-se que, se as restrições de f a $[a, c]$ e $[c, b]$ forem Riemann-integráveis, então f também o é e $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Por outro lado, a Riemann-integrabilidade de f implica a Riemann-integrabilidade da restrição de f a qualquer subintervalo $[\alpha, \beta]$ de $[a, b]$, o que será deixado como exercício (use a Riemann-integrabilidade de f para mostrar que o net das somas de Riemann da restrição de f a $[\alpha, \beta]$ é de Cauchy).

2. Para toda partição pontilhada (P, ξ) de $[a, b]$, tem-se $\|S(f, P, \xi)\| \leq M(b-a)$. Como $\int_a^b f$ é o limite do net $\{S(f)_P\}_{P \in \mathcal{P}}$ das somas de Riemann de f , segue-se que $\|\int_a^b f\| \leq M(b-a)$ (pois, caso contrário, tomando $\delta \doteq \frac{\int_a^b f - M(b-a)}{2} > 0$, $\mathcal{U} \doteq \|\cdot\|^{-1}(\|\int_a^b f\| - \delta, +\infty)$ seria uma vizinhança aberta de $\int_a^b f$, para a qual existiria $P_0 \in \mathcal{P}$ tal que $S(f)_P \in \mathcal{U}$ se $P \geq P_0$; em particular, para todo pontilhamento ξ de P_0 , teríamos $\|S(f, P_0, \xi)\| > \|\int_a^b f\| - \delta > M(b-a)$, chegando-se a uma contradição).

Para toda partição pontilhada (P, ξ) de $[a, b]$, decorre da desigualdade triangular que $\|S(f, P, \xi)\| \leq S(\|f\|, P, \xi)$, i.e. $\|S(f, P, \xi)\| - S(\|f\|, P, \xi) \leq 0$. Supondo que f e $\|f\|$ sejam Riemann-integráveis, tem-se: (i) $S(f)_P \rightarrow \int_a^b f$, donde $\|S(f)_P\| \rightarrow \|\int_a^b f\|$ (pois $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, logo leva nets convergentes em nets convergentes) e (ii) $S(\|f\|)_P \rightarrow \int_a^b \|f\|$, o que acarreta $\|S(f)_P\| - S(\|f\|)_P \rightarrow \|\int_a^b f\| - \int_a^b \|f\|$. Como todo termo do net $P \in \mathcal{P} \mapsto \|S(f)_P\| - S(\|f\|)_P$ está contido em $(-\infty, 0]$, segue-se que $\|\int_a^b f\| - \int_a^b \|f\| \leq 0$, como afirmado.

3. Dados $f, g \in \mathcal{R}([a, b], E)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, os nets das somas de Riemann de $f+g$ e αf são, respectivamente, $\{S(f)_P + S(g)_P\}_{P \in \mathcal{P}}$ e $\{\alpha S(f)_P\}_{P \in \mathcal{P}}$. Assim, como $+$: $E \times E \rightarrow E$ e $\alpha \cdot : E \rightarrow E$ são contínuas, levam nets convergentes em nets convergentes, donde se conclui que $\{S(f)_P + S(g)_P\}_{P \in \mathcal{P}}$ e $\{\alpha S(f)_P\}_{P \in \mathcal{P}}$ convergem, respectivamente, para $\int_a^b f + \int_a^b g$ e $\alpha \int_a^b f$. Isto mostra que $\mathcal{R}([a, b], E)$ é um subespaço de $\mathcal{B}([a, b], E)$. Mostremos que tal subespaço é fechado. Com efeito, suponha que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência em $\mathcal{R}([a, b], E)$ que convirja uniformemente em $[a, b]$ para $f \in \mathcal{B}([a, b], E)$; devemos mostrar que f é Riemann-integrável, i.e. que o net das somas de Riemann de f é de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$, tome $p \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall t \in [a, b]) \|f_n(t) - f(t)\| < \epsilon/3(b-a)$ se $n \geq p$, e $P_0 \in \mathcal{P}$ tal que $(\forall P', P'' \in \mathcal{P})$

com $P_0 \leq P, P_0 \leq P'', \forall \xi' \text{ pontilhamento de } P', \forall \xi'' \text{ pontilhamento de } P''$) $\|S(f_p, P', \xi') - S(f_p, P'', \xi'')\| < \epsilon/3$. Então, aplicando a desigualdade triangular, conclui-se que $(\forall P', P'' \in \mathcal{P} \text{ com } P_0 \leq P, P_0 \leq P'', \forall \xi' \text{ pontilhamento de } P', \forall \xi'' \text{ pontilhamento de } P'')$ $\|S(f, P', \xi') - S(f, P'', \xi'')\| = \|S(f - f_p, P', \xi') + S(f_p, P', \xi') - S(f_p, P'', \xi'') - S(f - f_p, P'', \xi'')\| \leq \|S(f - f_p, P', \xi')\| + \|S(f_p, P', \xi') - S(f_p, P'', \xi'')\| + \|S(f - f_p, P'', \xi'')\| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}(b-a) + \epsilon/3 + \frac{\epsilon}{3(b-a)}(b-a) = \epsilon$, o que demonstra ser de Cauchy o net das somas de Riemann de f , i.e. f é Riemann-integrável. Além disso, $\|\int_a^b f_n - \int_a^b f\| = \|\int_a^b (f_n - f)\| \leq \int_a^b \|f_n - f\| \leq \frac{\epsilon(b-a)}{3}$ se $n \geq p$, o que mostra que $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$, i.e. $\int_a^b : \mathcal{R}([a, b], E) \rightarrow E$ é um operador linear contínuo, como afirmado.

4. Com efeito, dada $f \in \mathcal{R}([a, b], E)$, o net das somas de Riemann de $T \circ f$ é $\{T \cdot S(f)_P\}_{P \in \mathcal{P}}$, i.e. a imagem por T do net das somas de Riemann de f . Como T é contínuo e $S(f)_P \rightarrow \int_a^b f$, segue-se que $T \cdot S(f)_P \rightarrow T \cdot \int_a^b f$, i.e. $T \circ f$ é Riemann integrável e $\int_a^b T \circ f = T \cdot \int_a^b f$, como afirmado. $\square$

PROPOSIÇÃO 1.15. *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$, E e F espaços de Banach e $h = (f, g) : [a, b] \rightarrow E \times F$ limitada. Então h é Riemann-integrável se, e somente se, $f : [a, b] \rightarrow E$ e $g : [a, b] \rightarrow F$ o forem; em caso afirmativo, tem-se $\int_a^b h = (\int_a^b f, \int_a^b g)$.*

Demonstração. A proposição decorre imediatamente do fato de que o net das somas de Riemann de h é tal que a sua imagem pela projeção no primeiro fator é o net das somas de Riemann de f e que a sua imagem pela projeção no segundo fator é o net das somas de Riemann de g . $\square$

TEOREMA 1.16 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$, E espaço de Banach e $f : [a, b] \rightarrow E$ Riemann-integrável. Tem-se:*

1. *Seja $F : [a, b] \rightarrow E$ dada por $t \mapsto \int_a^t f$. Se f for contínua em $c \in [a, b]$, então F é derivável em c e $F'(c) = f(c)$.*
2. *Suponha que exista $F : [a, b] \rightarrow E$ contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, tal que $F' = f$ em $]a, b[$. Então $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

Demonstração. 1. Tem-se, $\forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $c + h \in [a, b]$, $\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} [f(t) - f(c)] dt$, donde $\|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\| \leq \frac{1}{|h|} |\int_c^{c+h} \|f(t) - f(c)\| dt| \leq \sup\{\|f(t) - f(c)\| \mid t \in [a, b] \text{ e } \|t - c\| \leq |h|\}$, e a tese segue, então, da continuidade de f em c .

2. Para todo funcional linear contínuo $\alpha \in E'$, segue-se do último item da proposição 1.14 que $\alpha \circ f$ é Riemann-integrável e $\int_a^b \alpha \circ f = \alpha \cdot \int_a^b f$. Além disso, $\alpha \circ F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, e (pela regra da cadeia) $(\alpha \circ F)' = \alpha \circ f$ em $]a, b[$. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo para funções $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, conclui-se que $\alpha \cdot F(b) - \alpha \cdot F(a) = \int_a^b \alpha \circ f = \alpha \cdot \int_a^b f$. Portanto, o vetor $\int_a^b f - F(b) - F(a)$ de E está no núcleo de todo funcional linear contínuo em E ; pelo teorema de Hahn-Banach, tal vetor deve ser nulo, como afirmado.

Para quem não conhece o teorema de Hahn-Banach, pode-se demonstrar o caso particular em que f é contínua a partir do item anterior, aplicando-se o teorema dos acréscimos finitos para a aplicação $[a, b] \rightarrow E$ dada por $t \mapsto F(t) - \int_a^t f$. $\square$

Referências

- [1] R. GORDON, *Riemann Integration on Banach Spaces*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 21 (1991), pp. 923–949.
- [2] J. L. KELLEY, *General Topology*, vol. 27 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1975.