

MAT5711 - Notas de Aula - Partições da Unidade

(1)

Diferenciáveis

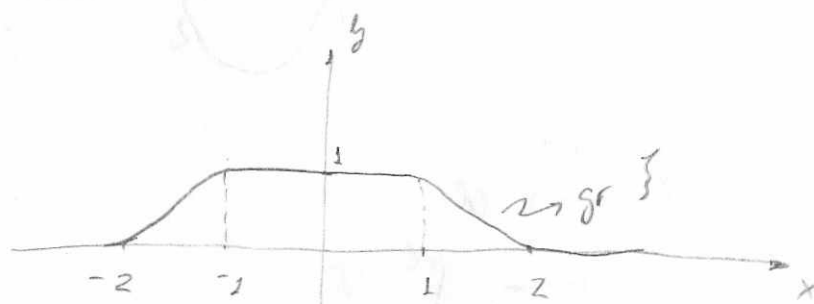
Def.: Sejam X e.m. e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Supp } f = \overline{f^{-1}(0)^c}$$

Lema: $\exists \xi: \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ t.q. $0 \leq \xi \leq 1$,

$$\xi|_{B_1[0]} = 1, \quad \xi = 0 \text{ em } B_2[0]^c \text{ e } 0 < \xi(x) < 1 \text{ se}$$

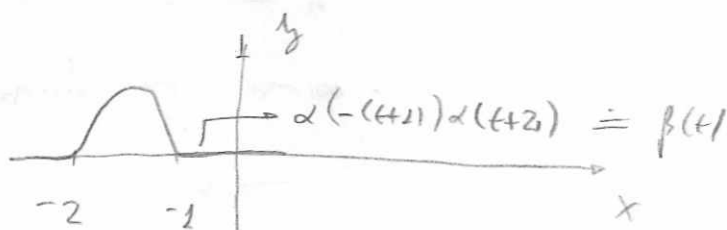
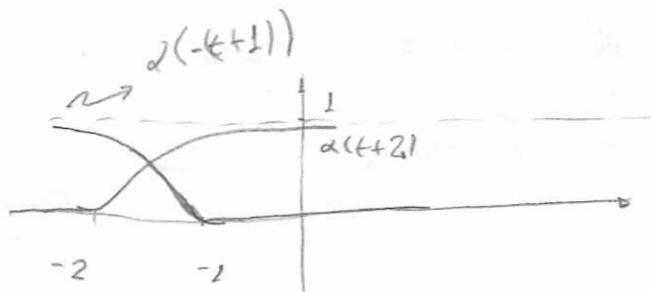
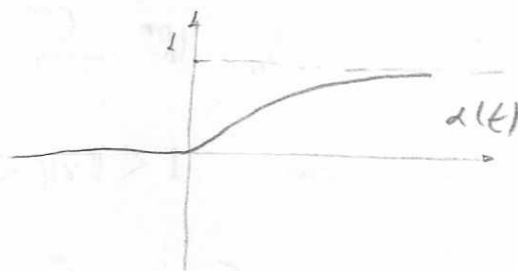
$$1 < |x| < 2.$$



Dem.:

$$(i) \alpha: \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-1/t}, & t > 0 \end{cases}$$



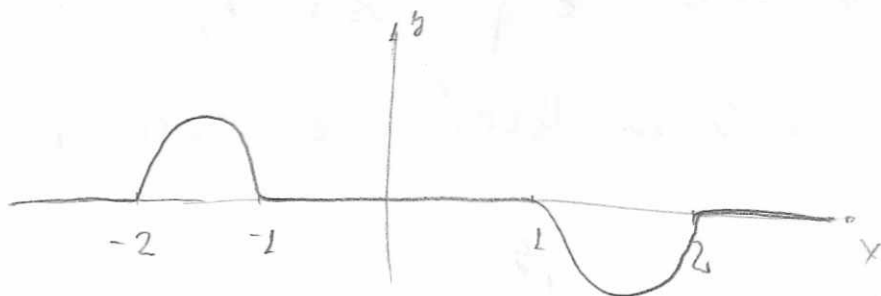
$$(ii) \beta: \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \alpha(-(t+1)) \cdot \alpha(t+2)$$

$$(iii) \quad b = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(t) dt$$

$$\gamma: \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{\beta(t)}{b}, & t \leq 0 \\ -\frac{\beta(-t)}{b}, & t > 0 \end{cases}$$



$$(iv) \quad \xi: \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \int_{-\infty}^t \gamma$$

#

Corolário: $\exists \xi_n: \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ t.q. $\xi_n|_{B_1[0]} = 1$, $\xi_n|_{B_2[0]^c} = 0$,
 $0 < \xi < 1$ em $1 < \|x\| < 2$.

Prov.: Tome $\xi_n = \xi \circ \|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana e ξ como no lema. #

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^n$ sup. de classe $C^{k \geq 1}$, com ou sem bordo. Então, $\forall p \in M$, existem funções de classe C^k como ξ_n acima com suportes em vit. arbitrariamente pequenas de p . Isto é uma consequência do lema acima:



Lema : (H) $M^m \subset \mathbb{R}^n$ sup. com bord ∂M e classe $C^{k \geq 1}$, $p \in \mathbb{Z}^{ob} M$. (3)

(i) $\exists p \in M \setminus \partial M$, $\exists \varphi: B_3(0) \rightarrow U \subset \mathbb{Z}$
 $\in \mathcal{A}_p(M)$ com $\varphi(0) = p$

(ii) $\exists p \in \partial M$, $\exists \varphi: B_3(0) \cap H_1 \rightarrow U \subset \mathbb{Z}$
 $\in \mathcal{A}_p(M)$ com $\varphi(0) = p$
onde $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^m / x_1 \leq 0\}$

Dem.: (i) Seja $\varphi: U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset \mathbb{Z} \in \mathcal{A}_p(M)$.
Existe $B_r(x_0) \subset U$. Tome $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $x \mapsto x_0 + x \cdot \frac{r}{3}$

Então F é lisa C^∞ e $F(B_3(0)) \subset B_r(x_0)$

$\therefore \varphi = \varphi \circ F: B_r(0) \rightarrow U \in \mathcal{A}_p(M)$.

(ii) é análoga.

Corolário: Com a mesma hipótese, $\exists \xi: M \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}$
t.q. $\xi = 1$ numa viz. de p , $0 \leq \xi \leq 1$ e

$\text{Supp } \xi \subset \mathbb{Z}$.

Dem.: Basta tomar $\xi = \begin{cases} \xi_m \circ \varphi^{-1} & \text{em } \varphi(B_3(0)) \\ 0 & \text{fora de } \varphi(B_3(0)) \end{cases}$

no caso (i) e $\xi = \begin{cases} \xi_m \circ \varphi^{-1} & \text{em } \varphi(B_3(0) \cap H_1) \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$

no caso (ii).

Notação: Se, com a notação do lema acima,

(1) $\varphi: B_3(0) \rightarrow U_p \in \mathcal{A}_p(M)$ for uma parametrização do tipo (i), usaremos a notação $W_p \doteq \varphi(B_1(0))$

$$\text{e } V_p \doteq \varphi(B_2(0))$$

(2) $\varphi: B_3(0) \cap M_1 \rightarrow U \in \mathcal{A}_p(M)$ do tipo (ii),

$$W_p \doteq \varphi(B_1(0) \cap M_1), \quad V_p \doteq \varphi(B_2(0) \cap M_1).$$

Nos dois casos, obtém-se viz. abertas $p \in W_p \subset V_p \subset U_p$ com $\bar{V} \subset V$ e $\bar{V} \subset U$ e $\xi_p \in C^k(M)$ t.q.
 $0 \leq \xi_p \leq 1$, $\text{supp } \xi_p = \bar{V} \subset U$, $0 < \xi_p < 1$ em $V \setminus \bar{W}$, $\xi_p = 1$ em $\bar{W}$.

Def.: Com a notação acima, diz-se que ξ_p é a função-teste associada a φ .

Def. [famílias localmente finitas]: Uma família $(C_\alpha)_{\alpha \in L}$ de subconjuntos de uma sup. M diz-se localmente finita se $\forall p \in M, \exists U \in \mathcal{B}_p(M), \exists L_0 \subset L$ finito t.q. $C_\alpha \cap U = \emptyset$ e $\alpha \notin L_0$.

Prop.: 1/ Toda família finita é local/ finita.

2/ $(C_\alpha)_{\alpha \in L}$ local/ finita $\Rightarrow (C_\alpha)_{\alpha \in L}$ pontualmente finita, i.e. $\forall p \in M, \exists L_0 \subset L$ finito t.q. $p \notin C_\alpha$ se $\alpha \notin L_0$.



3.) $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ localmente finita $\Rightarrow \exists L_0 \subset L$ enumerável (5)
t.g. $C_\lambda = \emptyset$ se $\lambda \notin L_0$.

Dem.: Seja $(U_p)_{p \in M}$ cobertura aberta de M .
t.g. $(\forall p \in M) \ U_p \in \mathcal{B}_p(M)$ e $\exists L_p \subset L$ finito
t.g. $C_\lambda \cap U_p = \emptyset$ se $\lambda \notin L_p$.
A cobertura $(U_p)_{p \in M}$ permite extrair uma subcobertura enumerável $(U_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Então $L_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_{p_n}$ é enumerável e, se $\lambda \notin L_0$, $(\forall n \in \mathbb{N}) \ C_\lambda \cap U_{p_n} = \emptyset$
 $\therefore \emptyset = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_\lambda \cap U_{p_n} = C_\lambda \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{p_n} \right) = C_\lambda \cap M$
 $\therefore C_\lambda = \emptyset$. #

4.) $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ local/finita na superfície M
e $K \subset M$ compacto $\Rightarrow \exists L_0 \subset L$ finito
t.g. $C_\lambda \cap K = \emptyset$ se $\lambda \notin L_0$. Em particular,
se M compacta, $\exists L_0 \subset L$ finito / $C_\lambda = \emptyset$
se $\lambda \notin L_0$.

Dem.: Basta tomar $(U_j)_{1 \leq j \leq K}$ cobertura aberta finita de K / $\forall j, \exists L_j \subset L$ finito / $C_\lambda \cap U_j = \emptyset$
se $\lambda \notin L_j$. Ponha $L_0 = \bigcup_{1 \leq j \leq K} L_j$. #

5.) $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ localmente finita $\Rightarrow \overline{\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda} = \bigcup_{\lambda \in L} \overline{C_\lambda}$. ⑥

Em particular, a união de uma família localmente finita de fechados é fechada.

Dem.:

(i) $\forall \lambda \in L$, $\overline{\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda}$ é um fechado que contém C_λ $\therefore$ contém $\overline{C_\lambda}$, donde $\overline{\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda} \supset \bigcup_{\lambda \in L} \overline{C_\lambda}$.

(ii) Por outro lado, $\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in L} \overline{C_\lambda} \therefore \overline{\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda} \subset \overline{\bigcup_{\lambda \in L} \overline{C_\lambda}}$.

Assim, basta provar que $\bigcup_{\lambda \in L} \overline{C_\lambda}$ é fechado. Com

efeito, seja $p \in (\bigcup_{\lambda \in L} \overline{C_\lambda})^c$. $\exists U_p \in \mathcal{B}_p(M)$, $\exists L_0 \subset L$

finito t.q. $C_\lambda \cap U_p = \emptyset$ se $\lambda \notin L_0$. Para cada $\lambda \in L_0$,

tome $V_\lambda \in \mathcal{B}_p(M)$, $V_\lambda \subset U$ t.q. $V_\lambda \cap \overline{C_\lambda} = \emptyset$ (existe,

pois $p \notin \overline{C_\lambda}$). Tome $V = \bigcap_{\lambda \in L_0} V_\lambda \in \mathcal{B}_p(M)$; então

$$V \cap \bigcup_{\lambda \in L} \overline{C_\lambda} = \emptyset \quad \#$$

6.) $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ família de funções C^k $M \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$(\text{supp } f_\lambda)_{\lambda \in L}$ localmente finita. Então $\sum_{\lambda \in L} f_\lambda \in C^k(M)$.



Dem.: $\forall p \in M, \exists U \in \mathcal{E}_p(M), \exists L_0 \subset L$ finito

t.q. $\text{supp } f_\lambda \cap U = \emptyset$ se $\lambda \notin L_0 \therefore f_\lambda = 0$

em U se $\lambda \notin L_0 \therefore \sum_{\lambda \in L} f_\lambda|_U = \sum_{\lambda \in L_0} f_\lambda \in C^k(U)$.
#

Def. [Partição da unidade]:

Seja $M^n \subset \mathbb{R}^n$ sup. C^k (cl ou sem bordo).

Uma partição da unidade de classe C^k em M

é uma família $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ em $C^k(M)$ t.q.:

1/ $\forall \lambda, f_\lambda \geq 0$

2/ $(\text{supp } f_\lambda)_{\lambda \in L}$ localmente finita

3/ $\sum_{\lambda \in L} f_\lambda = 1$

Def.: Com a mesma notação, seja $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de M .

• Diz-se qe uma partição da unidade $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ é subordinada a $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ se $\forall \lambda \in L, \exists \alpha \in A$ t.q. $\text{supp } f_\lambda \subset U_\alpha$.

• Diz-se qe $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ é estritamente subordinada a $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ se $L=A$ e $(\forall \lambda \in L) \text{supp } f_\lambda \subset U_\lambda$.

Teorema: (i) $M^m \subset \mathbb{R}^n$ sup. e/ loc. de classe C^k
 $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ cob. aberta de M .

- (ii) (i) $\exists (f_\alpha)_{\alpha \in A}$ partição de unidade C^k subordinada a $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ l.q. $(\forall \alpha) \text{ supp } f_\alpha$ compacto.
 (ii) $\exists (f_\alpha)_{\alpha \in A}$ p.u. C^k estritamente subordinada a $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Lema 1: Com a mesma hip., $\exists (K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ família enumerável de compactos em M l.q. $(\forall i) K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$ e
 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = M$.

Lema 2: Com a mesma hip., $\exists (U_\lambda)_{\lambda \in L}$ refinamento localmente finito de $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ l.q. $(\forall \lambda) U_\lambda$ é imagem de uma parametrização do tipo (i) $\varphi_\lambda: B_3(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$
 ou (ii) $\varphi_\lambda: B_3(0) \cap M^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, de modo que os abertos (em M) $W_\lambda = \varphi_\lambda(B_3(0))$ ou $W_\lambda = \varphi_\lambda(B_3(0) \cap M^1)$, $\lambda \in L$, ainda cobrem M .

Para o Lema 1:

$\forall x \in M$, $\exists V_x \in \mathcal{B}_x(M)$ l.q. $\overline{V}_x$ compacto. De $(V_x)_{x \in M}$ extraímos uma subcobertura enumerável $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Então $(\overline{V}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ainda é uma cobertura de M . Agora definimos $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ indutivamente por:

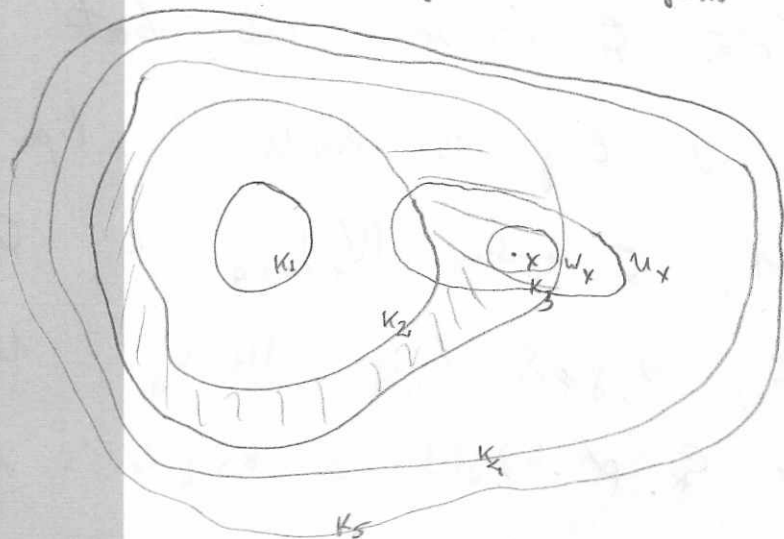
(i) $K_1 = \bar{V}_1$

(ii) Supondo definidos $K_1, \dots, K_j$ compactos de M t.q. $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$ p/ $1 \leq i \leq j-1$ e $K_i \supset \bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_i$ p/ $1 \leq i \leq j$, escolhemos um subconjunto finito de $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ que cubra o compacto $K_j \cup \bar{V}_{j+1}$, digamos $V_{j_1}, \dots, V_{j_k}$. Ponha $K_{j+1} = K_j \cup (\bigcup_{1 \leq i \leq k} \bar{V}_{j_i})$. Então K_{j+1} é compacto, $K_j \subset \bigcup_{1 \leq i \leq k} V_{j_i} \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ e $K_{j+1} \supset \bar{V}_{j+1} \cup K_j \supset \bigcup_{1 \leq i \leq j+1} \bar{V}_i$.

Então $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma família de compactos de M t.q. $(\forall j) K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ e $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j \supset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bar{V}_j = M$. #

Dem. do lema 2 :

Seja $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ família de compactos de M t.q. $(\forall j) K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ e $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = M$



(i) $\forall x \in K_2, \exists \alpha \in A / x \in V_\alpha$.

Tome U_x viz. coordenada de x $(= \gamma_x(B_3))$ ou $= \gamma_x(B_3 \cap H_1)$ conforme notação fixada anteriormente, t.q. $U_x \subset V_\alpha \cap \overset{\circ}{K}_3$. Ponha $W_x \subset U_x$ imagem da

bola aberta de raio 1 por φ_x , extraia da cobertura ⁽¹⁰⁾

aberta $(W_x)_{x \in K_2}$ do compacto K_2 uma subcob. finita

C'_2 ; seja C_2 a cobertura aberta de K_2 formada pelos U_x correspondentes.

(ii) $\forall x \in K_3 \setminus K_2^\circ$, $\exists \alpha \in A / x \in V_\alpha$. Tome U_x t.q.

$U_x \subset K_3 \setminus K_1^{\cup V_2}$; da cob. aberta $(W_y)_{y \in K_3}$ de $K_3 \setminus K_2^\circ$,

extraia uma subcobertura finita C'_3 , e seja C_3 a cobertura aberta formada pelos U_x correspondentes.

(iii) Assim procedendo, construímos $C_3, \dots, C_j$, p/ $j \geq 3$, coberturas

abertas finitas de $K_j \setminus K_{j-1}^\circ$ formadas por ab. do tipo

U t.q. que os abertos do tipo W correspondentes tb

cobrem $K_j \setminus K_{j-1}^\circ$ e t.q. os abertos do tipo M correspon-

dentes, estejam contidos no aberto $K_{j+1}^\circ \setminus K_{j-2}$ e em algum

aberto V_α .

Tome $\mathcal{C} = (C_j)_{j \geq 2}$. Então $\mathcal{C}$ é uma cob. aberta de

M por abertos do tipo U t.q. os abertos do tipo W

correspondentes tb cobrem M , e refina $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{C}$

é local/finita: $\forall U \in \mathcal{C}$, $\exists j \geq 2$ t.q. $U \in C_j$: U

não intersecta os abertos de C_k p/ $k \geq j+3$ ou $k \leq j-2$. #

Dem. do teorema:

(1)

(i) Seja $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ refinamento ^{local/finito} de $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ c.g.
 $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \varphi_n(B_3)$ ou $U_n = \varphi_n(B_3 \cap M_1)$,
 onde $\varphi_n \in A(M)$, e c.g. $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainda
 é cobertura aberta de M , onde $W_n = \varphi_n(B_1)$
 ou $\varphi_n(B_1 \cap M_1)$, $\forall n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, tome $\bar{\xi}_n \in C^k(M)$ função teste
 associada a φ_n . Ponha $\bar{\xi} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\xi}_n$; como
 $(\text{supp } \bar{\xi}_n)_n$ é uma cob. local/finita de M , $\bar{\xi}$
 está bem definida, é de classe C^k e $(\forall x \in M)$
 $\bar{\xi}(x) > 0$. Finalmente, $(\forall n) \quad \bar{\xi}_n = \bar{\xi}_n / \bar{\xi}$. Então
 $(\bar{\xi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é p. u. subordinada a $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\text{supp } \bar{\xi}_n = \text{supp } \bar{\xi}_n = \bar{V}_n$ compacto.

(ii) Seja $(\bar{\xi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a p. u. definida em (i). Tome
 $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ c.g. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \bar{V}_n = \text{supp } \bar{\xi}_n \subset V_{f(n)}$.
 Como $(\forall \alpha \in A) \quad \mu_\alpha = \sum_{n \in f^{-1}(\alpha)} \bar{\xi}_n$.
 Então $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ é p. u. C^k estrita/sub. a $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Aplicação: o integral é uma m -forma ^{continua} ω sobre um sup. $M^m \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ com bordo orientado.

1/ Seja $\omega \in \Omega_m^{(co)}(M, F)$, F Banach.

$$\text{Supp } \omega \doteq \overline{\{x \in M / \omega(x) \neq 0\}}.$$

2/ Seja $\omega \in \Omega_m^{(co)}(M, F)$ / $\text{Supp } \omega$ compacto.

(i) Suponha qe $\exists \varphi: U_0 \rightarrow U \in \mathcal{A}(M)$ ^{positiva} e.g.

$\text{Supp } \omega \subset U$. $\exists! f: U_0 \rightarrow F$ continua

e.g. $\omega = f \circ \varphi^{-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ onde $x^i \doteq \varphi^i \circ \varphi^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}$.
De fato, $\varphi^* \omega = f e^1 \wedge \dots \wedge e^m \in \Omega_m^{(co)}(U_0, F)$.
Então f tem suporte compacto $\varphi^{-1}(\text{Supp } \omega) \subset U_0$.

Definimos $\int_M \omega \doteq \int_{U_0} f.$

Obs.: Como $\text{Supp } f$ compacto, $\int_{U_0} f$ está bem def.

mesmo que U_0 não seja T -mens.; basta por

$$\int_{U_0} f \doteq \int_K f \quad \text{onde } K \subset U_0 \text{ compacto } T\text{-mens. qe contém } \text{Supp } f.$$

Verifiquemos qe $\int_M \omega$ está bem definida,

i.e. independe de carta positiva tomada.

Seja $\psi: V_0 \rightarrow V \in A(M)$ positiva ✓

Supp $w \subset V$. $\exists!$ $g: V_0 \rightarrow F$ continuous t.g.

$$\psi^* \omega = g e^1 \wedge \dots \wedge e^m \in \mathbb{R}_n^{(col)}(V_0, F). \quad \text{SPG } \underline{\text{post}}$$

no super $U = V$ (e não, tomando restrições

unvenienter). Entan $\psi^* \omega = (\psi \circ \bar{\psi}^t \circ \psi)^* \omega =$

$$= (\psi^{-1} \circ \psi)^* \varphi^* \omega = (\psi^{-1} \circ \psi)^* (f e^1 \dots e^m) =$$

$$= (f \circ \varphi^{-1} \circ \psi) \det D(\varphi^{-1} \circ \psi) e^1 \dots e^m \quad \varphi \circ \psi \text{ positif}$$

$$\therefore g = f \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ \psi \text{ let } D(\tilde{\varphi}^{-1} \circ \psi) = f \circ (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \psi) \text{ let } D(\tilde{\varphi}^{-1} \circ \psi)$$

Assim, tomando $K \subset V_0$ compacto J -mens. / $\text{supp } g \subset K$,
tem-se :

$$\int_{V_0} g = \int_K g = \int_K f \circ \varphi^{-1} \psi \, |\det D(\varphi^{-1} \psi)| = \text{TMV}$$

$$\stackrel{TMV}{=} \int_{(\varphi^{-1} \circ \psi)^{-1}(K)} f = \int_{u_0} f \quad \neq$$

(ii) No caso geral, sejam $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ cobertura

Aberta & M por imagens & cortes positivos

$\varphi_i : \mathcal{U}_{\alpha,i} \rightarrow \mathcal{U}_i \in (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ p.u. C^1 criticamen
 e subordinato a $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Dada $\omega \in \Omega_m^{\text{loc}}(M, F)$, F Poncho, com
 $\text{supp } \omega$ compacto, ponha $\omega_i \equiv \xi_i \omega$. Então $\omega =$
 $= \sum_{i \in \mathbb{N}} \omega_i$, e a soma é finita (i.e. apenas
um n.º finito de parcelas é $\neq 0$), pois $\text{supp } \xi_i$
é local / finita e $\text{supp } \omega$ é compacto $\therefore$ intersecta
 $\text{supp } \xi_i$ apenas p/ um n.º finito de índices.

Definimos $\int_M \omega \equiv \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_M \omega_i$, onde, p/ cada
 $i \in \mathbb{N}$, $\int_M \omega_i$ é definida como em (i).

Verifiquemos que esta def. independe da cob.
aberta e p.v. escolhida. Se $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ for outra
cob. aberta de M com $\psi_j: V_{j,0} \rightarrow V_j \in \mathcal{A}(M)$ pr.
e $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ p.v. C^1 extraída/ sub. a $(\chi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, considere

$$\omega \text{ m-forma: } \omega_i = \xi_i \omega, \quad \bar{\omega}_j = \eta_j \omega, \quad \omega_{ij} = \xi_i \eta_j \omega.$$

$$\text{Tem-se: } \sum_i \omega_{ij} = \sum_i \xi_i \eta_j \omega = \eta_j \omega = \bar{\omega}_j$$

$$\sum_j \omega_{ij} = \sum_j \xi_i \eta_j \omega = \xi_i \omega = \omega_i$$

$$\therefore \sum_i \int_M \omega_i = \sum_i \int_M \sum_j \omega_{ij} = \sum_{i,j} \int_M \omega_{ij}$$

$$\sum_j \int_M \bar{\omega}_j = \sum_j \int_M \sum_i \omega_{ij} = \sum_j \sum_i \int_M \omega_{ij} \quad \#$$

Prop. [propriedades da integral] :

(15)

Sejam M^m sup. orientada de bordo $C^{k \geq 1}$, F esp. de Banach, $\alpha, \beta \in L_m^{col}(M, F)$ com suporte compacto e $c \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$1. \int_M (c\alpha + \beta) = \int_M c\alpha + \int_M \beta$$

$$2. \int_M c\alpha = c \int_M \alpha$$

3. Se $F = \mathbb{R}$ e $\alpha \geq 0$ (ou seja, $(\forall x \in M) \langle \alpha(x) \rangle \geq 0$, i.e. numa carta positiva $\varphi: U_0 \rightarrow U$, $\varphi^*\omega = \alpha(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ com $\alpha(x) \geq 0$), então $\int_M \alpha \geq 0$, e vale $\int_M \alpha = 0 \iff \exists x \in M / \alpha(x) > 0$.

4. Se N for outra sup. orientada C^k e $f: N \rightarrow M$ for um difeo C^1 :

$$\int_N f^* \alpha = \begin{cases} \int_M \alpha & \text{se } f \text{ pres. orientação} \\ - \int_M \alpha & \text{se } f \text{ rev. orientação} \end{cases}$$

Outros objetos que podem ser integrados em Superfícies:

1/ $M^m \subset \mathbb{R}^n$ sup. orientada $C^{k \geq 1}$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ contínuo de sup. compacto:

$$\int_M f = \int_M f \, \tau, \quad \text{onde } \tau \text{ elemento de volume de } M$$

2/ Campos & vetores

6

$M^m \subset \mathbb{R}^n$ sup. orientada $C^{k \geq 1}$, $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$
contínua e sup. compacto.

(i) se $m=1$:

$$\int_M F = \int_M F^b$$

onde $F^b \in \Omega_1^{\text{cov}}(M, \mathbb{R})$ é dada por

$$\forall x \in M, \forall \sigma \in T_x M, F^b \cdot \sigma = \langle F, \sigma \rangle.$$

(ii) se $m=n-1$:

$$\int_M F = \int_M i_F \sigma, \text{ onde } \sigma = e^1 \wedge \dots \wedge e^n \text{ é o}$$

elemento de volume de $\mathbb{R}^n \rightarrow$ este é o fluxo
de F através de M .

prop.: $i_F \sigma = \langle F, \omega \rangle \sigma_M$

onde ω normal unitária que define a orientação
de M e σ_M elemento de volume de M .

3/ se $M \xrightarrow{\lambda} N \subset \mathbb{R}^n$, M sup. compacto, ω

forma contínua no sup. N cujo grau é igual a $\dim M$,

definimos $\int_{\lambda} \omega = \int_M \lambda^* \omega$. Exemplo: integral ao
longo de curvas.