

Definições :

1/ Bloco n -dimensional fechado $\doteq R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$

" " aberto $\doteq \overset{\circ}{R} = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{vol}(R) \doteq \text{vol}(\overset{\circ}{R}) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

2/ Seja R um bloco fechado $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Uma partição de R é um conjunto finito

$$P = P_1 \times \dots \times P_n$$

onde $(\forall i) P_i$ partição de $[a_i, b_i]$

Notação : $\mathcal{P} = \mathcal{P}(R) = \{ P \subset R / P \text{ partição de } R \}$

(ii) Sejam $R \subset \mathbb{R}^n$ bloco fechado e $P \in \mathcal{P}(R)$,

$$P = P_1 \times \dots \times P_n, \quad (\forall i) P_i = \{ t_{i,1}^i, \dots, t_{i,k_i}^i \}.$$

Então P divide R em subbloco, $[t_{i,1}^i, t_{i,2}^i] \times \dots \times$
 $\times [t_{i,n-1}^i, t_{i,n}^i]$ cujas arestas são intervalos das

partições P_i , $1 \leq i \leq n$. Chamamos tais subbloco
 de bloco da partição P (notação $\mathcal{B} = \mathcal{B}(P)$).

Assim, $R = \bigcup \mathcal{B}(P)$. Note que $\text{vol}(R) = \sum_{B \in \mathcal{B}(P)} \text{vol}(B)$, pela distribuição.

(iii) Se $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(R)$, diz-se que P_2 refina P_1
 se $P_2 \supset P_1$.

3/ Seja $R \subset \mathbb{R}^n$ bloco fechado

e $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ limitada.

$$\forall P \in \mathcal{P}(R), \forall B \in \mathcal{B}(P): \quad m_B(f) = \inf \{ f(x); x \in B \}$$

$$M_B(f) = \sup \{ f(x); x \in B \}$$

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{B \in \mathcal{B}} m_B(f) \text{vol}(B)$$

$$\bar{S}(f, P) = \sum_{B \in \mathcal{B}} M_B(f) \text{vol}(B)$$

$$\therefore \text{ se } m = \inf f(R), M = \sup f(R):$$

$$m \text{vol}(R) \leq \underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P) \leq M \text{vol}(R)$$

Prop.: Com a notação acima, se $Q \supset P$:

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q) \quad \text{e} \quad \bar{S}(f, Q) \leq \bar{S}(f, P)$$

Corolário: $\forall P, Q \in \mathcal{P}, \quad m \text{vol}(R) \leq \underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, Q) \leq M \text{vol}(R)$

Def.: $\underline{\int} f = \sup \{ \underline{S}(f, P) : P \in \mathcal{P} \}$

$$\bar{\int} f = \inf \{ \bar{S}(f, P) : P \in \mathcal{P} \}$$

f R -integrável se $\underline{\int} f = \bar{\int} f$; em caso

afirmativo, $\int_R f = \underline{\int} f = \bar{\int} f$.

Notação: $\mathcal{R}(R) = \{ f: R \rightarrow \mathbb{R} \text{ } R\text{-int.} \}$

Prop.: Com a notação acima, f é R -int.

(3)

See $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P} / \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$.

Def.: $X \subset \text{dom } f$

$$\begin{aligned} \omega_f(X) &= \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in X \} = \\ &= \sup \{ f(x) : x \in X \} - \inf \{ f(x) : x \in X \} \end{aligned}$$

Corolário: Com a mesma notação, f é R -int.

See $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}$ tal que

$$\omega(f, P) = \sum_{B \in \mathcal{B}} \omega_B(f) \text{ vol}(B) < \varepsilon$$

Corolário: Função contínua é R -int.

Prop.: [Propriedades da Int. de Riemann]:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f, g \in \mathcal{R}(R), \alpha, \beta \in \mathbb{R} &\Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{R} \\ \text{e } \int_R (\alpha f + \beta g) &= \alpha \int_R f + \beta \int_R g \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad \text{se } (\forall x \in R) f(x) \geq 0, \quad \int_R f \geq 0$$

$$\text{(iii)} \quad f \in \mathcal{R} \Rightarrow |f| \in \mathcal{R} \quad \text{e} \quad \left| \int_R f \right| \leq \int_R |f|$$

$$\text{(iv)} \quad \text{se } f \text{ é contínua, } \exists x_0 \in R / \int_R f = f(x_0) \cdot \text{vol}(R).$$

Conjuntos de Medida Nula

Def.: Diz-se que $X \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula se
 $\forall \varepsilon > 0, \exists (C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ família enumerável de cubos abertos

t.q. $X \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(C_i) < \varepsilon$.

Notação: $\mu(X) = 0$

Def.: Diz-se que $X \subset \mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo se
 $\forall \varepsilon > 0, \exists (C_i)_{1 \leq i \leq n}$ família finita de cubos abertos, t.q.

$X \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_i$ e $\sum_{i=1}^n \text{vol}(C_i) < \varepsilon$. Notação: $c(X) = 0$.

Prop.: Com a notação acima:

(i) $c(X) = 0 \Rightarrow \mu(X) = 0$

(ii) Se X compacto, $\mu(X) = 0 \Rightarrow c(X) = 0$.

Prop. [propriedades dos conjuntos de medida nula]:

(1) $Y \subset X$ e $\mu(X) = 0 \Rightarrow \mu(Y) = 0$

(2) Se $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ e $\forall i, \mu(X_i) = 0$, $\mu(X) = 0$

(3) Se $\forall \varepsilon > 0, \exists (C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ fam. de cubos abertos t.q.
 $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(C_i) < \varepsilon$, $Y / \mu(Y) = 0$ e $X \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \cup Y$,
então $\mu(X) = 0$.

(4) Na def. de conj. de medida nula podemos usar cubos fechados, ou ainda blocos (abertos ou fechados) no lugar de cubos abertos.

Corolário: Se $n < m$ e $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{m-n} /$

$X \subset \mathbb{R}^n \times \{\alpha\} \subset \mathbb{R}^m$, então $\mu(X) = 0$ em $\mathbb{R}^m$.
Em particular, as faces de um cubo m -dimensional em $\mathbb{R}^m$ têm med. nula.

(5) $\mu(X) = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{X} = \emptyset$

(6) Se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ é localmente Lipschitz, então $\mu(X) = 0 \Rightarrow \mu(f(X)) = 0$

Corolário: $U \subset \mathbb{R}^m$, $f: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$, $X \subset U$

$\mu(X) = 0 \Rightarrow \mu(f(X)) = 0$

Corolário: $m < n$ e $f: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu(f(U)) = 0$.

Def. [conj. de medida nula numa superfície]:

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^n$ sup. de classe C^k , $k \geq 1$ e $X \subset M$.

(i) se $\exists \varphi: U \rightarrow M \in A(M) / X \subset U$, diz-se qe X tem med. nula se $\mu(\varphi^{-1}(X)) = 0$ em $\mathbb{R}^m$.

(ii) no caso geral, $\mu(X) = 0$ se $\exists (U_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ família de vit. param. t.q. $X \subset \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} U_\alpha$ e $\mu(X \cap U_\alpha) = 0$ de acordo com (i).

→ Valem p conj. de medida nula em superfícies
propriedades análogas às de prop. anterior.

Caracterização de Funções R-integráveis

Teorema [de Lebesgue]:

Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ limitada no bloco fechado
 $R \subset \mathbb{R}^m$. Então $f \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \mu(\{x \in R / f \text{ descont. em } x\}) = 0$

Fubini

Teorema: Sejam $A_1 \subset \mathbb{R}^n$, $A_2 \subset \mathbb{R}^m$ blocos fechados e
 $f : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrável. Definamos

$$(\forall x \in A_1) \varphi(x) = \int_{A_2} f_x(y) dy \quad \text{e} \quad \psi(x) = \int_{A_2} \overline{f}_x(y) dy.$$

$$\text{Então } \varphi, \psi \in \mathcal{R}(A_1) \quad \text{e} \quad \int_{A_1 \times A_2} f = \int_{A_1} \varphi = \int_{A_1} \psi,$$

$$\text{i.e.} \quad \int_{A_1 \times A_2} f = \int_{A_1} dx \int_{A_2} f_x(y) dy = \int_{A_1} dx \int_{A_2} \overline{f}_x(y) dy.$$

Dem.:

(7)

(i) Tem-se $\mathcal{P}(A_1 \times A_2) = \mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2)$; além disso,
dada $P \in \mathcal{P}(A_1 \times A_2)$, $P = P_1 \times P_2$, tem-se
 $\mathcal{B}(P) = \mathcal{B}(P_1) \times \mathcal{B}(P_2)$.

(ii) Seja $P = P_1 \times P_2 \in \mathcal{P}(A_1 \times A_2)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, P) &= \sum_{B \in \mathcal{B}(A_1 \times A_2)} m_B(f) \text{vol}(B) = \\ &= \sum_{B_1 \in \mathcal{P}(A_1)} \sum_{B_2 \in \mathcal{P}(A_2)} m_{B_1 \times B_2}(f) \text{vol}(B_1) \text{vol}(B_2) \end{aligned}$$

$$\forall x \in B_1 : m_{B_1 \times B_2}(f) \leq m_{B_2}(f_x)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{B_2 \in \mathcal{P}(A_2)} m_{B_1 \times B_2}(f) \text{vol}(B_2) &\leq \sum_{B_2 \in \mathcal{P}(A_2)} m_{B_2}(f_x) \text{vol}(B_2) \leq \\ &\leq \int_{A_2} f_x = \varphi(x) \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \sum_{B_2 \in \mathcal{P}(A_2)} m_{B_1 \times B_2}(f) \text{vol}(B_2) \leq m_{B_1}(\varphi)$$

$$\text{Logo } \sum_{B_1 \in \mathcal{P}(A_1)} \sum_{B_2 \in \mathcal{P}(A_2)} m_{B_1 \times B_2}(f) \text{vol}(B_2) \text{vol}(B_1) \leq \sum_{B_1 \in \mathcal{P}(A_1)} m_{B_1}(\varphi) \text{vol}(B_1)$$

i.e. $\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(\varphi, P_1)$; analogamente, tem-se

$\bar{S}(\varphi, P_1) \leq \bar{S}(f, P)$. Como f é R -int.,

conclui-se que φ tb. o é e $\int_{A_1 \times A_2} f = \int_{A_1} \varphi$. Analogamente
p/ ψ . #

(8)

Def. [conjunto Jordan-mensurável]:

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Diz-se que X é

J-mensurável se $\exists R$ bloco fechado / $X \subset R$,

$\chi_X : R \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrável. Em caso af., $\text{vol}(X) = \int_R \chi_X$.

Prop.: Com a notação acima, X é J-mens.

se $\mu(\partial X) = 0$.

tem med. 0

Dem.: Se $R \supset X$, $D_{\chi_X} \cup (\partial X \cap \partial R) = \partial X$

$$\therefore \mu(D_{\chi_X}) = 0 \Rightarrow \mu(\partial X) = 0.$$

Prop.: (i) X, Y J-mensuráveis contidos no bloco $A \subset \mathbb{R}^n$

(ii) $X \cup Y, X \cap Y, A \setminus X$ J-mens.

$$\text{vol}(X \cup Y) + \text{vol}(X \cap Y) = \text{vol}(X) + \text{vol}(Y)$$

$$\text{Dem.} \therefore \partial(X \cup Y) \subset \partial X \cup \partial Y$$

$$\partial(X \cap Y) \subset \partial X \cup \partial Y$$

$$\partial(A \setminus X) \subset \partial A \cup \partial X$$

$$\chi_X + \chi_Y = \chi_{X \cup Y} + \chi_{X \cap Y}$$

Concluído: X, Y J-mens., $\int \chi_{X \cap Y} = 0 \Rightarrow$

$$\text{vol}(X \cup Y) = \text{vol}(X) + \text{vol}(Y).$$

Dem.: $\bar{X} \cap \bar{Y} = \emptyset \Rightarrow X \cap Y \subset \partial X \cup \partial Y \therefore \mu(X \cap Y) = 0.$

Def.: [Conj. J -mensurável num. sup.]

$M^m \subset \mathbb{R}^n$ sup. & classe C^1

$X \subset M$ limitado dit -ie J -mensurável & $\mu(\partial X) = 0$.

Def. [R -integrabilidade e integral de Riemann de f limitado num J -mensurável]

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ J -mensurável e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

limitado. Dit -ie qe $f \in \mathcal{R}$ se $\exists R \supset X$ bloco

fecho t.q. $\bar{f}: R \rightarrow \mathbb{R}$ ser R -
$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in X \\ 0, & x \in R \setminus X \end{cases}$$

-integrável. Em caso at., $\int_X f = \int_R \bar{f}$.

Prop.: Com a notação acima, $f \in \mathcal{R}$

te $\mu(P_f) = 0$.

lem.: $P_f \subset P_{\bar{f}} \subset P_f \cup \partial X$

$\therefore \mu(P_{\bar{f}}) = 0 \Leftrightarrow \mu(P_f) = 0$.

$\rightarrow$ valem as propriedades acima do integral de Riemann.

Prop.: (H) $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ J -mens.

(19)

$f: X \cup Y \rightarrow \mathbb{R}$ limitada

(i) $f \in \mathcal{Q}$ se e $f|_X \in \mathcal{Q}$ e $f|_Y \in \mathcal{Q}$

(ii) Em caso ab.:

$$\int_{X \cup Y} f = \int_X f + \int_Y f - \int_{X \cap Y} f$$

Dem.: Seja $\bar{f}$ extensão de f num bloco fech.

$A \supset X \cup Y$. Tem-se:

$$(i) \mathcal{D}_{f|_X} \cup \mathcal{D}_{f|_Y} \subset \mathcal{D}_{\bar{f}} \subset \mathcal{D}_{f|_X} \cup \mathcal{D}_{f|_Y} \cup \partial X \cup \partial Y$$

$$\therefore \mu(\mathcal{D}_{\bar{f}}) = 0 \Leftrightarrow \mu(\mathcal{D}_{f|_X} \cup \mathcal{D}_{f|_Y}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu(\mathcal{D}_{f|_X}) = 0 \text{ e } \mu(\mathcal{D}_{f|_Y}) = 0$$

$$(ii) \bar{f} = \bar{f} \cdot \chi_{X \cup Y} = \bar{f} \cdot \chi_X + \bar{f} \cdot \chi_Y - \bar{f} \cdot \chi_{X \cap Y}$$

Corolário: (H) $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ J -mens.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ou } \text{int}(Y-X) = \emptyset \\ \mu(Y-X) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \mu(Y-X) = 0$, $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ limitada
e $c \in \mathbb{R}$

$$(i) \int_Y f = \int_X f$$

Em particular, $\int_Y f = \int_Y f$.