MAT5711 - Cálculo Avançado - Notas de Aula

2 de março de 2010

§1. ESPAÇOS MÉTRICOS

DEFINIÇÃO 1.1. *Um* espaço métrico *é um par* (X, d)*, onde* X *é um conjunto e* $m : X \times X \to \mathbb{R}$ *é tal que,* $\forall p, q \in X$*:*

(i) $\mathrm{d}(p, q) > 0$ *se* $p \neq q$; $\mathrm{d}(p, p) = 0$*;*

(ii) $\mathrm{d}(p, q) = \mathrm{d}(q, p)$*;*

(iii) $\mathrm{d}(p, q) \leqslant \mathrm{d}(p, r) + \mathrm{d}(r, q)$, $\forall r \in X$.

d chama-se *métrica* ou *distância* em X.

Exemplo 1.2. $X = \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}(p, q) \doteq \|p - q\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclideana em $\mathbb{R}^n$, i.e. $(\forall v \in \mathbb{R}^n)\|v\| \doteq \sqrt{\langle v, v\rangle}$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$.

DEFINIÇÃO 1.3. *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $Y \subset X$*. A restrição* $\mathrm{d}|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ *é uma métrica em* Y*, munido da qual se torna um espaço métrico, chamado* subespaço métrico *de* X*.*

DEFINIÇÃO 1.4. *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $a \in X$*,* $r > 0$*. Definem-se:*

bola aberta de centro a **e raio** r**:** $B_r(a) \doteq \{p \in X \mid \mathrm{d}(p, a) < r\}$*;*

bola fechada de centro a **e raio** r**:** $B_r[a] \doteq \{p \in X \mid \mathrm{d}(p, a) \leqslant r\}$.

DEFINIÇÃO 1.5. *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $\mathcal{U} \subset X$*. Diz-se que* $p \in \mathcal{U}$ *é* ponto interior de $\mathcal{U}$*, ou que* $\mathcal{U}$ *é uma* vizinhança *de* p*, se* $\exists r > 0$ *tal que* $B_r(p) \subset \mathcal{U}$*. O* interior de $\mathcal{U}$ *é o conjunto* $\mathrm{int}\, \mathcal{U} \doteq \{p \in \mathcal{U} \mid p \text{ ponto interior de } \mathcal{U}\}$*. Diz-se que* $\mathcal{U}$ *é* aberto *se* $\mathcal{U} = \mathrm{int}\, \mathcal{U}$*, i.e. se* $\mathcal{U}$ *for uma vizinhança de cada um de seus pontos.*

PROPOSIÇÃO 1.6. *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Tem-se:*

1. *As bolas abertas de* X *são conjuntos abertos.*
2. *Dado* $\mathcal{U} \subset X$*, o interior de* $\mathcal{U}$ *é o maior aberto de* X *contido em* $\mathcal{U}$*, i.e.* $\mathrm{int}\, \mathcal{U}$ *é um aberto e se* $V \subset \mathcal{U}$ *for aberto, então* $V \subset \mathrm{int}\, \mathcal{U}$*.*
3. *Dado* Y *subespaço métrico de* X*,* $\mathcal{U}_Y \subset Y$ *é aberto de* (Y, d) *se, e somente se, existir* $\mathcal{U}$ *aberto de* (X, d) *tal que* $\mathcal{U}_Y = \mathcal{U} \cap Y$*. Diz-se, neste caso, que* $\mathcal{U}_Y$ *é* aberto em Y*.*

PROPOSIÇÃO 1.7. *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Tem-se:*

T1: X *e* $\emptyset$ *são abertos;*

T2: *se* $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ *é uma família de abertos de* X*, então* $\cup_{\alpha\in A}\mathcal{U}_\alpha$ *é aberto;*

T3: *se* $\mathcal{U}_1$ *e* $\mathcal{U}_2$ *são abertos de* X*, então* $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ *é aberto.*

Observação 1.8. *Sejam* X *um conjunto (não necessariamente munido de uma métrica) e* $\mathscr{T}$ *um subconjunto do conjunto das partes de* X*,* 2^X*, cujos elementos, chamados* abertos*, satisfazem as propriedades T1, T2 e T3 da proposição acima.* $\mathscr{T}$ *chama-se uma* topologia *em* X*, e* $(X, \mathscr{T})$ *um* espaço topológico*. Portanto, segue-se da proposição acima que todo espaço métrico possui uma topologia canonicamente definida pela métrica.*

Definição 1.9. *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $\mathcal{U} \subset X$. *Diz-se que* $p \in X$ *é* aderente *a* $\mathcal{U}$ *se toda bola aberta centrada em* p *contiver pontos de* $\mathcal{U}$. *O* fecho *ou* aderência *de* $\mathcal{U}$ *é o conjunto* $\overline{\mathcal{U}} \doteq \{p \in X \mid p \text{ aderente a } \mathcal{U}\}$. *Diz-se que* $\mathcal{U}$ *é* fechado *se* $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}$.

Proposição 1.10 (regras de De Morgan). *Sejam* X *um conjunto e* $(A_i)_{i\in I}$ *uma família de subconjuntos de* X. *Dado* $A \in X$, *denote o complementar* $X \setminus A$ *por* $\widetilde{A}$. *Tem-se:*

1. $\widetilde{\cup_{i\in I} A_i} = \cap_{i\in I} \widetilde{A_i}$;
2. $\widetilde{\cap_{i\in I} A_i} = \cup_{i\in I} \widetilde{A_i}$.

Proposição 1.11. *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Tem-se:*

1. *$F \subset X$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\widetilde{F}$ for aberto.*
2. *As bolas fechados de X são conjuntos fechados.*
3. *Dado $F \subset X$, o fecho de F é o menor fechado de X que contém F, i.e. $\overline{F}$ é um fechado e se $G \subset X$ for um fechado tal que $G \supset F$, então $G \supset \overline{F}$.*

Proposição 1.12. *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Tem-se:*

T1': *X e $\emptyset$ são fechados;*

T2': *se $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ é uma família de fechados de X, então $\cap_{\alpha\in A} F_\alpha$ é fechado;*

T3': *se F_1 e F_2 são fechados de X, então $F_1 \cup F_2$ é fechado.*

Definição 1.13. *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $p \in X$ *e* $Y \subset X$.

1. *Diz-se que p é* ponto de acumulação *de Y se toda bola aberta de X centrada em p contiver pontos de Y distintos de p. Denota-se o conjunto dos pontos de acumulação de Y por Y'.*
2. *Se $p \in Y$ e p não for ponto de acumulação de Y, diz-se que p é um* ponto isolado *de Y.*
3. *Diz-se que p é um* ponto de fronteira *de Y se toda bola aberta de X centrada em p contiver pontos de Y e do complementar $\widetilde{Y} = X \setminus Y$ de Y. A* fronteira de Y em X *é o conjunto $\partial Y \doteq \{p \in X \mid p \text{ ponto de fronteira de } Y\}$.*
4. *Diz-se que Y é* limitado *se existir uma bola $B \subset X$ tal que $Y \subset B$.*
5. *Diz-se que Y é* denso *em X se $\overline{Y} = X$.*

Proposição 1.14. *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $p \in X$ *e* $Y \subset X$. *Tem-se:*

1. *p é ponto de acumulação de Y se, e somente se, toda bola aberta de X centrada em p contiver infinitos pontos de Y. Consequentemente, se Y for finito, então Y não tem pontos de acumulação.*
2. *p é ponto isolado de Y se existir uma bola aberta B de X tal que $B \cap Y = \{p\}$.*
3. *$\overline{Y} = Y \cup Y'$; consequentemente, Y é fechado se, e somente se, contiver todos os seus pontos de acumulação.*
4. *∂Y é fechado, e $\overline{Y} = \operatorname{int} Y \dot{\cup} \partial Y$; consequentemente, Y é fechado se, e somente se, $\partial Y \subset Y$.*
5. *Y é aberto se, e somente se, $Y \cap \partial Y = \emptyset$.*

1.1. *Sequências*

Definição 1.15 (sequências e subsequências). *Seja A um conjunto. Uma* sequência em A *é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to A$. Usam-se as notações $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_n)_n$ ou (x_n) para denotar a sequência, e $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n \doteq x(n)$ para denotar o n-*ésimo termo *da sequência.*

Dada uma sequência $(x_n)_n$ em A, uma subsequência *de $(x_n)_n$ é a composta de $x : \mathbb{N} \to A$ com uma aplicação estritamente crescente $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (i.e. uma sequência $(n_j)_j$ em $\mathbb{N}$, estritamente crescente); tal composta é uma sequência em A, denotada por (x_{n_j}).*

Definição 1.16 (sequências convergentes e sequências de Cauchy). *Sejam (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_n$ uma sequência em X.*

1. *Diz-se que $(x_n)_n$ é uma sequência* convergente, *e que tem* limite *$a \in X$, se $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant n_0$, tem-se $\mathrm{d}(x_n, a) < \epsilon$.* Notação: *$x_n \to a$ ou $\lim x_n = a$.*

2. *Diz-se que $(x_n)_n$ é uma sequência* de Cauchy *se, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $m, n \geqslant n_0$, tem-se $\mathrm{d}(x_n, x_n) < \epsilon$.*

3. *Diz-se que $(x_n)_n$ é uma sequência* limitada *se a sua imagem $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ for um subconjunto limitado de X.*

Proposição 1.17. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_n$ uma sequência em X. Tem-se:*

1. *Se $(x_n)_n$ é convergente, então o seu limite é único, e toda subsequência de $(x_n)_n$ converge para este limite.*

2. *Se $(x_n)_n$ é convergente, então é de Cauchy.*

3. *Se $(x_n)_n$ é de Cauchy, então é limitada.*

Definição 1.18. *Um espaço métrico diz-se* completo *se toda sequência de Cauchy em X for convergente.*

Teorema 1.19. *$\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.*

Proposição 1.20. *Seja $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a projeção no i-ésimo fator, para $1 \leqslant i \leqslant m$. Dada $(x_n)_n$ uma sequência em $\mathbb{R}^m$, podemos tomar as suas componentes, i.e. para $1 \leqslant i \leqslant m$ as sequências $(x_n^i)_n$ em $\mathbb{R}$ dadas por $x_n^i \doteq \pi_i \circ x_n$, de modo que $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$. Tem-se:*

1. *$(x_n)_n$ é convergente, e converge para $a \in \mathbb{R}^m$, se, e somente se, (para $1 \leqslant i \leqslant m$) $x_n^i \to a^i \doteq \pi_i(a)$.*

2. *$(x_n)_n$ é de Cauchy se, e somente se, cada sequência componente $(x_n^i)_n$ o for, para $1 \leqslant i \leqslant m$.*

Corolário 1.21. *$\mathbb{R}^m$ é um espaço métrico completo.*

Proposição 1.22. *Sejam (X, d) um espaço métrico, $A \subset X$ e $p \in X$. Tem-se:*

1. *$p \in \overline{A}$ (i.e. p é ponto do fecho de A) se, e somente se, existir $(x_n)_n$ sequência em A tal que $x_n \to p$. Como corolário, A é denso em X se, e somente se, todo ponto de X for limite de uma sequência em A.*

2. *$p \in A'$ (i.e. p é ponto de acumulação de A) se, e somente se, existir $(x_n)_n$ sequência em $A \setminus \{p\}$ tal que $x_n \to p$.*

1.2. Limites e Aplicações Contínuas

Definição 1.23 (limites). *Sejam (X, d_X), (Y, d_Y) espaços métricos, $A \subset X$, $p \in A'$ e $f : A \to Y$. Diz-se que f tem* limite *em p, e que o seu limite é $q \in Y$ (*notação: *$\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$) se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, se $x \in A$ e $0 < \mathrm{d}_X(x, p) < \delta$, tem-se $\mathrm{d}_Y\big(f(x), q\big) < \epsilon$.*

Proposição 1.24. *Com a notação da definição 1.23, tem-se: $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_n$ em $A \setminus \{p\}$ convergente para p, $f(x_n) \to q$.*

Corolário 1.25. *Com a notação da definição 1.23, se f tiver limite em p, então o limite é único.*

Definição 1.26 (aplicações contínuas). *Sejam (X, d_X), (Y, d_Y) espaços métricos, $f : X \to Y$ e $p \in X$.*

1. *Diz-se que f é* contínua em p *se, para toda vizinhança $\mathcal{V}$ de $f(p)$ em Y, existir $\mathcal{U}$ vizinhança de p em X tal que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Equivalentemente, f é contínua em p se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ e $\mathrm{d}_X(x,p) < \delta$, tem-se $\mathrm{d}_Y\big(f(x), f(p)\big) < \epsilon$ (i.e. $f\big(B_\delta(p)\big) \subset B_\epsilon\big(f(p)\big)$).*

2. *Diz-se que f é* contínua *se o for em todos os pontos de X.*

Proposição 1.27. *Com a notação da definição 1.26, tem-se:*

1. *f é contínua em p se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_n$ em A convergente para p, $f(x_n) \to f(p)$.*

2. *se p for um ponto isolado de X, então f é contínua em p; se p for um ponto de acumulação de X, então f é contínua em p se, e somente se, $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.*

Definição 1.28. *(imagem inversa) Sejam X e Y conjuntos, $f : X \to Y$ uma aplicação e $A \subset Y$. A* imagem inversa de A por f, *denotada por $f^{-1}(A)$, é o conjunto dos pontos de X cuja imagem por f é um elemento de A, i.e. $f^{-1}(A) \doteq \{x \in X \mid f(x) \in A\}$.*

Proposição 1.29. *Com a notação da definição 1.28, tem-se:*

1. *$f^{-1}(\widetilde{A}) = \widetilde{f^{-1}(A)}$, onde $\widetilde{\cdot}$ denota o complementar;*

2. *se $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ for uma família de subconjuntos de Y, então $f^{-1}(\cup_{i\in I}\mathcal{U}_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ e $f^{-1}(\cap_{i\in I}\mathcal{U}_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{U}_i)$.*

Proposição 1.30. *Sejam (X, d_X), (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$. São equivalentes:*

1. *f é contínua;*

2. *para todo aberto $\mathcal{U} \subset Y$, $f^{-1}(\mathcal{U})$ é aberto em X;*

3. *para todo fechado $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ é fechado em X.*

Definição 1.31. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Podemos munir o produto $X \times Y$ da métrica $\mathrm{d} : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ dada por $\mathrm{d}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \doteq \sqrt{\mathrm{d}_X(x_1,x_2)^2 + \mathrm{d}_Y(y_1,y_2)^2}$. Salvo menção explícita em contrário, sempre consideraremos o produto $X \times Y$ como espaço métrico munido desta métrica. Neste espaço métrico, dados $(p,q) \in X \times Y$ e $\mathcal{U} \subset X \times Y$, $\mathcal{U}$ é uma vizinhança de (p,q) se, e somente se, existirem $\mathcal{V}$ vizinhança de p em X e $\mathcal{W}$ vizinhança de q em Y tais que $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$.*

Exemplo 1.32.

1. Seja (X, d) espaço métrico; então $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ é contínua.

2. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos; as projeções $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ são contínuas.

3. Sejam (X, d) espaço métrico e Y subespaço métrico de X; então a inclusão $i : Y \to X$ é contínua.

1.3. Compacidade

Definição 1.33 (coberturas). *Sejam X um conjunto e $K \subset X$. Uma* cobertura *de K é uma família $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ de subconjuntos de X tal que $K \subset \cup_{\alpha\in A}\mathcal{U}_\alpha$. Diz-se que a cobertura $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ é* finita *(ou* infinita, enumerável, *etc.) se o conjunto de índices A o for. Dada uma cobertura $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ de K, uma* subcobertura *de $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ é uma uma subfamília $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in B}$, $B \subset A$, que ainda é uma cobertura de K.*

Se (X, d) for um espaço métrico, uma cobertura aberta *de $K \subset X$ é uma cobertura $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ de K tal que, para cada $\alpha \in A$, $\mathcal{U}_\alpha$ é um aberto de X.*

Definição 1.34 (compactos). *Diz-se que um espaço métrico (X, d) é* compacto *se toda cobertura aberta de X admitir uma subcobertura finita. Dados (X, d) espaço métrico e $K \subset X$, diz-se que K é* compacto *se o for como subespaço métrico de X, i.e. se toda cobertura aberta de K admitir uma subcobertura finita.*

Proposição 1.35. *1. Sejam (X, d) um espaço métrico, $K \subset X$ compacto e $F \subset X$ fechado. Então $K \cap F$ é compacto. Em particular, todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto.*

2. Sejam (X, d) um espaço métrico e $K \subset X$ compacto. Então K é fechado e limitado.

Observação 1.36. *Não vale a recíproca do segundo item da proposição acima.*

Exemplo 1.37. 1. Num espaço métrico (X, d), todo subconjunto finito de X é compacto.

2. Num espaço métrico (X, d), dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para $p \in X$, o conjunto $K \doteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p\}$ é compacto.

3. Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, for fechado e limitado.

Definição 1.38. *Sejam X um conjunto e $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família de subconjuntos de X. Diz-se que $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ tem a* propriedade da intersecção finita *se, para todo subconjunto finito $B \subset A$, tem-se $\cap_{\alpha\in B} F_\alpha \neq \emptyset$.*

Seja (X, d) um espaço métrico. Dada uma cobertura aberta $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X, tomemos $(\forall \alpha \in A) F_\alpha \doteq \widetilde{\mathcal{U}_\alpha}$. Segue-se das proposições 1.10 e 1.11 que $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ é uma família de fechados cuja intersecção é vazia. Assim, dizer que toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita é equivalente a dizer que, toda família de fechados de X cuja intersecção é vazia possui uma subfamília finita cuja intersecção é vazia. Ou, equivalentemente:

Proposição 1.39. *Um espaço métrico (X, d) é compacto se, e somente se, toda família de fechados $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X com a propriedade da intersecção finita é tal que $\cap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \emptyset$.*

Corolário 1.40. *Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de fechados não-vazios de X tal que $(\forall n \in \mathbb{N}) F_n \supset F_{n+1}$. Então $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

Definição 1.41 (conjunto totalmente limitado). *Sejam (X, d) um espaço métrico e $K \subset X$. Diz-se que K é* totalmente limitado *se, para todo $r > 0$, existe uma cobertura finita de K por bolas de raio r.*

Proposição 1.42. *Com a notação da definição acima, se K for totalmente limitado, então K é limitado.*

Teorema 1.43 (caracterização de espaços métricos compactos). *Seja (X, d) um espaço métrico. São equivalentes:*

1. X é compacto;

2. todo subconjunto infinito F de X possui um ponto de acumulação em X;

3. toda sequência em X possui uma subsequência convergente a um ponto de X;

4. X é completo e totalmente limitado.

Proposição 1.44. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos compactos. Então $X \times Y$, munido da métrica definida em 1.31, é um espaço métrico compacto.*

Corolário 1.45. *Um subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, for fechado e limitado.*

1.3.1. Aplicações contínuas em compactos

Proposição 1.46. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$ contínua. Então, para todo $K \subset X$ compacto, $f(K)$ é compacto.*

Corolário 1.47. *Sejam* (X, d) *um espaço métrico compacto e* $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua. Então* f *assume máximo e mínimo em* X, *i.e. existem* $x_1, x_2 \in X$ *tais que, para todo* $x \in X$, $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$.

Proposição 1.48. *Sejam* (X, d_X) *espaço métrico compacto,* (Y, d_Y) *espaço métrico e* $f : X \to Y$ *contínua bijetiva. Então a inversa de* f *é contínua, i.e.* f *é um* homeomorfismo *(i.e. uma aplicação contínua, bijetiva, com inversa contínua).*

§2. ESPAÇOS NORMADOS

Definição 2.1. *Seja* E *um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial. Uma* norma *em* E *é uma função* $\|\cdot\| : \mathsf{E} \to \mathbb{R}$ *tal que,* $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v, w \in \mathsf{E}$*:*

N1: $\|v\| > 0$ *se* $v \neq 0$ *e* $\|0\| = 0$*;*

N2: $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$

N3: $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

Diz-se que $(\mathsf{E}, \|\cdot\|)$ *é um* espaço normado*. Num tal espaço existe uma métrica canonicamente induzida pela norma, dada por* $(\forall v, w \in \mathsf{E})\mathrm{d}(v, w) = \|v - w\|$*; assim, todo espaço normado é um espaço métrico e, portanto, um espaço topológico. Diz-se que* $(\mathsf{E}, \|\cdot\|)$ *é um* espaço de Banach *se, como espaço métrico, for completo. Diz-se que um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial* E *munido de uma topologia* $\mathscr{T}$ *é* Banachable *se existir uma norma* $\|\cdot\|$ *em* E *cuja topologia subjacente seja* $\mathscr{T}$ *e que induza uma métrica completa em* E.

Exemplo 2.2.

1. Em $\mathbb{R}^n$, a *norma euclideana*, i.e. dada por $(\forall v \in \mathbb{R}^n)\|v\| \doteq \sqrt{\langle v, v\rangle}$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$.
2. Em $\mathbb{R}^n$, a *norma da soma*, i.e. dada por $(\forall v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n)\|v\| \doteq \sum_{i=1}^n |v_i|$.
3. Em $\mathbb{R}^n$, a *norma do máximo*, i.e. dada por $(\forall v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n)\|v\| \doteq \max_{1\leqslant i\leqslant n}|v_i|$.
4. Sejam X um conjunto e $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ o espaço das funções reais limitadas em X. A *norma da convergência uniforme* em $\mathsf{E} = \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ é dada por $(\forall f \in \mathsf{E})\|f\|_\infty \doteq \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. $(\mathsf{E}, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.
5. Generalizando o exemplo anterior, sejam X um conjunto, F um espaço normado e $\mathscr{B}(X, \mathsf{F})$ o espaço das funções limitadas $X \to \mathsf{F}$. A *norma da convergência uniforme* em $\mathsf{E} = \mathscr{B}(X, \mathsf{F})$ é dada por $(\forall f \in \mathsf{E})\|f\|_\infty \doteq \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$. $(\mathsf{E}, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach se, e somente se, F o for.
6. Sejam X um espaço métrico, F um espaço de Banach e $\mathscr{C}_b(X, \mathsf{F})$ o espaço das funções contínuas e limitadas $X \to \mathsf{F}$. Então $\mathscr{C}_b(X, \mathsf{F})$ é um subespaço fechado do espaço de Banach $\mathscr{B}(X, \mathsf{F})$, logo é um espaço de Banach.
7. Sejam E, F espaços de Banach e $\mathsf{L}(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ o espaço das transformações lineares contínuas $\mathsf{E} \to \mathsf{F}$. Defina $(\forall f \in \mathsf{L}(\mathsf{E}, \mathsf{F}))\|f\| \doteq \sup\{\|f(x)\| \mid x \in \mathsf{E}, \|x\| \leqslant 1\}$. Então $\|\cdot\| : \mathsf{L}(\mathsf{E}, \mathsf{F}) \to \mathbb{R}$ assim definida é uma norma, munido da qual $\mathsf{L}(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ é um espaço de Banach.

Definição 2.3. *Sejam* E *um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial,* $\|\cdot\|$ *e* $|||\cdot|||$ *normas em* E*. Diz-se que as referidas normas são* equivalentes *se existirem constantes* $C_1, C_2 > 0$ *tais que* $(\forall v \in \mathsf{E})|||v||| \leqslant C_1\|v\|$ *e* $\|v\| \leqslant C_2|||v|||$.

Proposição 2.4. *Num* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial* E*, duas normas equivalentes* $\|\cdot\|$ *e* $|||\cdot|||$ *induzem a mesma topologia, i.e. um subconjunto* $\mathcal{U} \subset \mathsf{E}$ *é um aberto de* $(\mathsf{E}, \|\cdot\|)$ *se, e somente se, for um aberto de* $(\mathsf{E}, |||\cdot|||)$.

Teorema 2.5. *Duas normas quaisquer em* $\mathbb{R}^n$ *são equivalentes.*

Corolário 2.6. *Duas normas quaisquer num* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial de dimensão finita são equivalentes.*