

①

$$(H) \begin{cases} \omega \subset \mathbb{C}, \bar{\omega} \text{ bn. compacto c/ fronteira } C^1 \\ u \in C^1(\bar{\omega}, \mathbb{C}), \zeta \in \omega \end{cases}$$

$$(P) \quad 2\pi i u(\zeta) = \int_{\partial\omega} \frac{u(z)}{z-\zeta} dz - \iint_{\omega} \frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-\zeta} d\bar{z} \wedge dz$$

(Fórmula integral de Cauchy)

Dem.:

$$\int_{\partial\omega} u dz \stackrel{\text{teo. Stokes}}{=} \int_{\omega} du \wedge dz = \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \overbrace{d\bar{z} \wedge dz}^{= 2i dx \wedge dy} \quad (*)$$

Tomemos $0 < \varepsilon < d(\zeta, \omega^c)$; ponhamos $\omega_\varepsilon \doteq \bar{\omega} \setminus B_\varepsilon(\zeta)$

Aplicando (*) p/ $z \mapsto \frac{u(z)}{z-\zeta}$ em ω_ε , tem-se:

$$\int_{\partial\omega} \frac{u(z)}{z-\zeta} dz - \int_{\partial B_\varepsilon(\zeta)} \frac{u(z)}{z-\zeta} dz \stackrel{(*)}{=} \int_{\omega_\varepsilon} \left[\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-\zeta} + \underbrace{u(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{z-\zeta} \right)}_{=0} \right] d\bar{z} \wedge dz$$

(1) Tomando $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \partial B_\varepsilon(\zeta)$, tem-se:

$$t \mapsto \zeta + \varepsilon \underbrace{(e^{it}, ie^{it})}_{= e^{it}}$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon(\zeta)} \frac{u(z)}{z-\zeta} dz = \int_{[0, 2\pi]} \varphi^* \left(\frac{u(z)}{z-\zeta} dz \right) = \int_0^{2\pi} \frac{u(\zeta + \varepsilon e^{it})}{\zeta + \varepsilon e^{it} - \zeta} d(\zeta + \varepsilon e^{it}) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{u(\zeta + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon e^{it} i dt. \text{ Como } u \text{ é contínua,}$$

$$\text{segue-se } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(\zeta)} \frac{u(z)}{z-\zeta} dz = u(\zeta) \cdot 2\pi i$$

(2)
(ii) Afirmando que $z \mapsto \frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{1}{z-\xi}$ é integrável em $\omega \setminus \{\xi\}$. Com efeito, como $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ é contínua em $\bar{\omega}$ ($\therefore$ limitada, pois $\bar{\omega}$ é compacto), basta verificar que $z \mapsto \frac{1}{\|z-\xi\|}$ é integrável em $\omega \setminus \{\xi\}$. Para tal, é suficiente verificar que $z \mapsto \frac{1}{\|z-\xi\|}$ é integrável em $B_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}$; tomando $\psi: (0, \varepsilon) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$,
 $(\rho, \theta) \mapsto \xi + \rho e^{i\theta}$,

ψ é difeo sobre $B_\varepsilon(\xi) \setminus \underbrace{\{(x, 0) / 0 \leq x < \varepsilon\}}_{F, \text{ fechado em } B_\varepsilon(\xi) \text{ e medida nula}}$

$$\mathbb{C} \quad \psi^* \left(\frac{1}{\|z-\xi\|} dx \wedge dy \right) = \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\rho d\theta \quad \text{é integrável}$$

em $(0, \varepsilon) \times (0, 2\pi)$ $\therefore \frac{1}{\|z-\xi\|}$ é integrável

em $B_\varepsilon(\xi) \setminus F$ $\therefore$ é integrável em $B_\varepsilon(\xi)$, como afirmado. Então

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-\xi} dz = \int_{\omega \setminus \{\xi\}} \frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-\xi} dz$$

$\therefore$ (T) segue-se tomando $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ em (**). $\neq$