

Resolução da Questão 15 da Lista #2

(1) Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \|f(x) - f(a)\|^2$$

Tem-se $\psi \in C^2$ e $\forall x \in U, \forall v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$\psi'(x) \cdot v = 2 \langle f'(x) \cdot v, f(x) - f(a) \rangle$$

$$\begin{aligned} \psi''(x) \cdot (v, w) &= 2 \langle f''(x) \cdot (v, w), f(x) - f(a) \rangle + \\ &+ 2 \langle f'(x) \cdot v, f'(x) \cdot w \rangle \end{aligned}$$

$$\therefore \psi''(a) \cdot v^2 = 2 \|f'(a) \cdot v\|^2$$

Como $f'(a) \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\psi''(a)$ é definida

positiva. Assim, $\exists c > 0 / \psi''(a) \cdot v^2 > c, \forall v \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$

Ora, $U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\Psi} \mathbb{R}$ é contínua $\therefore Z \equiv \Psi^{-1}(c, +\infty)$
 $(x, v) \mapsto \psi''(x) \cdot v^2$

é aberto e $\{a\} \times S^{n-1} \subset Z$. Pela compacidade de S^{n-1} , podemos tomar $\delta > 0$ t.q. $B_\delta(a) \times S^{n-1} \subset Z$, o que mostra que $\psi''(x)$ é definida positiva para todo $x \in B_\delta(a)$. Assim, ψ é convexa numa vizinhança de a .

(2) Pelo teorema da aplicação inversa, existe B bola aberta centrada em $b=f(a)$ tal que $f|_{f^{-1}(B)}: f^{-1}(B) \rightarrow B$ seja difeo $\mathbb{C}^2$. Pelo

mesmo argumento ∇a podemos reduzir o raio de B , se necessário, de modo a garantir que a função:

$$\begin{aligned} \varphi: B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \|f^{-1}(y) - a\|^2 \end{aligned}$$

seja convexa. Tome $r > 0$ / $B_r(a) \subset f^{-1}(B)$. Afirimo que, $\forall 0 < \rho \leq r$, $f(B_\rho(a))$ é convexo. Com efeito, dados $p, q \in B_\rho(a)$, $p \neq q$, mostremos que $[f(p), f(q)] \subset f(B_\rho(a))$. Pela convexidade de B , tem-se $[f(p), f(q)] \subset B$; tome $\gamma(t) = f(p) + t[f(q) - f(p)]$, $0 \leq t \leq 1$, e $\alpha(t) = \varphi \circ \gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Então $\alpha \in \mathbb{C}^2$ e α é convexo; portanto, $(\forall t \in [0, 1]) \alpha(t) \leq \max\{\alpha(0), \alpha(1)\} < \rho^2$, i.e. $(\forall t \in [0, 1]) \|f^{-1}(\gamma(t)) - a\|^2 < \rho^2 \dots$
 $\therefore f^{-1}([f(p), f(q)]) \subset B_\rho(a) \quad \#$