

Questão 1-) Sejam $B \doteq \{E \subset \mathbb{R}^n : E = \prod_1^n [a_i, b_i], -\infty < a_i < b_i < \infty\}$ o conjunto dos intervalos abertos limitados n -dimensionais em $\mathbb{R}^n$ e $\rho : B \cup \{\emptyset\} \rightarrow [0, \infty]$ dada por $\rho(\emptyset) = 0$ e $\rho(\prod_1^n [a_i, b_i]) = \prod_1^n (b_i - a_i)$. Então ρ é uma pré-medida exterior e, sendo m^* a medida exterior induzida por ρ , o conjunto dos m^* -mensuráveis coincide com a σ -álgebra de Lebesgue e a restrição de m^* a este conjunto coincide com a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Questão 2-) Demonstre os teoremas 2.40 e 2.41.

Questão 3-) Seja $\phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(r, \theta) \doteq (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Mostre que, para toda $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-mensurável, $f \circ \phi$ é Lebesgue-mensurável e, caso $f \geq 0$ ou $f \in L^1$, $\int f \, dm = \int_{[0, 2\pi]} \int_{[0, \infty)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r^2 \, dm(r) \, dm(\theta)$.

Questão 4-) (apenas para quem já estudou EDO) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e X um campo de vetores de classe C^2 em Ω cujo divergente se anule identicamente. Mostre que o fluxo de X preserva a medida de Lebesgue, i.e. se $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ for o grupo local a 1 parâmetro induzido por X , então $(\phi_t)_* m = m$.

1 Seções 2.6 e 2.7

56-) Sejam f Lebesgue-integrável em $(0, a)$ e $g : (0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) \doteq \int_x^a t^{-1} f(t) \, dt$. Então g é integrável em $(0, a)$ e $\int_0^a g(x) \, dx = \int_0^a f(x) \, dx$.

57-) Mostre que $\int_0^\infty e^{-sx} x^{-1} \sin x \, dx = \arctan(s^{-1})$ para $s > 0$. (SUGESTÃO: Integre $e^{-sxy} \sin x$ com respeito a x e a y .)

59-) Seja $f(x) = x^{-1} \sin x$.

(a) Mostre que $\int_0^\infty |f(x)| \, dx = \infty$.

(b) Mostre que $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) \, dx = \pi/2$. SUGESTÃO: Integre $e^{-xy} \sin x$ com respeito a x e a y ; em vista do item anterior, deve-se tomar algum cuidado ao tomar o limite para $b \rightarrow \infty$.

60-) $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y) \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, dt$ para $x, y > 0$. SUGESTÃO: Escreva $\Gamma(x)\Gamma(y)$ como integral dupla e use uma mudança de variáveis conveniente.

61-) Seja f contínua em $[0, \infty)$. Para $\alpha > 0$ e $x \geq 0$, defina a *integral fracionária de ordem α de f* :

$$I_\alpha f(x) \doteq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) \, dt.$$

a) $I_{\alpha+\beta} f = I_\alpha(I_\beta f)$, para $\alpha, \beta > 0$.

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_n f$ é uma antiderivada de ordem n de f .

62-) A medida σ em S^{n-1} é invariante por rotações.

63-) (INTEGRAIS DE POLINÔMIOS EM S^{n-1}). A técnica usada para se calcular $\sigma(S^{n-1})$ pode ser aplicada para se calcular integrais de polinômios em S^{n-1} . Por exemplo, seja $f(x) = \prod_1^n x_j^{\alpha_j}$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então $\int f \, d\sigma = 0$ se algum dos α_j for ímpar; se todos os α_j forem pares, tem-se:

$$\int f \, d\sigma = \frac{2\Gamma(\beta_1) \cdots \Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\beta_1 + \cdots + \beta_n)}, \text{ onde } \beta_j \doteq \frac{\alpha_j + 1}{2}.$$