

MAT234 - Medida e Integração - IME - 2016

Prof. Gláucio Terra

Lista 4 - 15/09/2016

Em todas as questões abaixo, $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável.

- Questão 1-)** (i) Defina $\text{sgn} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por $\text{sgn}(z) = z/|z|$ se $z \neq 0$ e $\text{sgn}(0) = 0$, de modo que $(\forall z \in \mathbb{C}) z = \text{sgn}(z) \cdot |z|$. Então sgn é mensurável.
- (ii) Sejam $(X, \mathcal{M})$ espaço mensurável e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Então $f = \text{sgn}(f) \cdot |f|$ (esta é a *decomposição polar* de f); f é mensurável *see* $\text{sgn}(f)$ e $|f|$ o forem.

Questão 2-) Demonstre as proposições 2.11 e 2.12.

Questão 3-) Sejam $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, $f \geq 0$, e $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec (0, \infty)$ tal que $r_n \rightarrow 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \infty$. Então existe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$ tal que $(\forall x \in X) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \chi_{A_n}(x)$. Em particular, f é o limite pontual de uma sequência crescente de funções simples.

1 Seção 2.1

2-) Sejam $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis.

- (a) fg é mensurável (onde $0 \cdot (\pm\infty) \doteq 0$).
- (b) Fixe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e defina $h(x) = a$ se $f(x) = -g(x) = \pm\infty$ e $h(x) = f(x) + g(x)$ caso contrário. Então h é mensurável.

3-) Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis em X . Então $\{x \in X : \exists \lim f_n(x)\}$ é mensurável.

4-) Se $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $(\forall r \in \mathbb{Q}) f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{M}$, então f é mensurável.

5-) Se $X = A \cup B$, com $A, B \in \mathcal{M}$, uma função f em X é mensurável *see* $f|_A$ e $f|_B$ forem mensuráveis.

6-) O supremo de uma família não enumerável de funções mensuráveis $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pode não ser mensurável.

8-) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona, então f é Borel-mensurável.

11-) Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x, \cdot)$ é Borel-mensurável e $(\forall y \in \mathbb{R}) f(\cdot, y)$ é contínua. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ como segue. Para todo $i \in \mathbb{Z}$, ponha $a_i \doteq i/n$ e, para $a_i \leq x \leq a_{i+1}$:

$$f_n(x, y) \doteq \frac{f(a_i, y) \cdot (x - a_i) + f(a_{i+1}, y) \cdot (a_{i+1} - x)}{a_{i+1} - a_i}$$

Então $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n$ é Borel-mensurável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ e $f_n \rightarrow f$ pontualmente. Portanto, f é Borel-mensurável. Conclua, por indução em k , que toda função $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ separadamente contínua em cada variável é Borel-mensurável.