MAT234 - Medida e Integração - IME - 2016
Prof. Gláucio Terra

Lista 2 - 17/08/2016

1 Exercícios do Folland

1.1 Seção 1.3

7-) Se $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são medidas em $(X, \mathcal{M})$ e $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$, então $\sum_{i=1}^n a_i \mu_i$ é uma medida em $(X, \mathcal{M})$.

Definição 1 *Para uma sequência* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de subconjuntos de* X, $\liminf E_n \doteq \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\geq n} E_n$ *e* $\limsup E_n \doteq \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} E_n$.

8-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{M}$. Então $\mu(\liminf E_n) \leqslant \liminf \mu E_n$. Além disso, se $\mu(\cup_1^\infty E_n) < \infty$, então $\mu(\limsup E_n) \geqslant \limsup \mu E_n$.

9-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E, F \in \mathcal{M}$. Então $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F)$.

10-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathcal{M}$. Defina $(\forall A \in \mathcal{M}) \mu \llcorner E(A) \doteq \mu(E \cap A)$. Então $\mu \llcorner E$ é uma medida.

11-) Uma *medida finitamente aditiva* μ em $(X, \mathcal{M})$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e, para toda $(E_n)_1^k \prec\!\cdot\, \mathcal{M}$, $\mu(\cup_1^k E_n) = \sum_1^k \mu(E_n)$. Verifique que uma medida finitamente aditiva μ em $(X, \mathcal{M})$ é uma medida ***see*** μ é contínua para cima (i.e. $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim \mu(E_n)$ sempre que $(E_n)_n$ for uma sequência crescente em $\mathcal{M}$). Se $\mu(X) < \infty$, esta condição também é equivalente a ser μ contínua para baixo.

12-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finito.

(a) Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $\mu(E \Delta F) = 0$, então $\mu(E) = \mu(F)$.
(b) Defina $E \sim F$ se $\mu(E \Delta F) = 0$. Então μ é uma relação de equivalência em $\mathcal{M}$.
(c) Defina $\rho(E, F) \doteq \mu(E \Delta F)$. Então $\rho(E, G) \leqslant \rho(E, F) + \rho(F, G)$, de modo que ρ define uma métrica no quociente $\mathcal{M}/\sim$.

13-) Toda medida σ-finita é semi-finita.

14-) Sejam μ uma medida semi-finita e E mensurável tal que $\mu(E) = \infty$. Então, para todo $C > 0$, existe $F \subset E$ mensurável tal que $C < \mu(F) < \infty$.

15-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida. Defina μ_0 em $\mathcal{M}$ por $\mu_0(E) \doteq \sup\{\mu(F) : F \subset E \text{ mensurável e } \mu(F) < \infty\}$.

(a) μ_0 é uma medida semi-finita. Chama-se *parte semi-finita* de μ.
(b) Se μ é semi-finita, então $\mu = \mu_0$.

(c) Existe uma medida ν em $\mathcal{M}$ (em geral, não é única) que assume apenas valores 0 e ∞ tal que $\mu = \mu_0 + \nu$.

16-) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto $E \subset X$ diz-se *localmente mensurável* se $E \cap A \in \mathcal{M}$ para todo $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) < \infty$. Seja $\mathcal{M}_{loc}$ o coleção de todos os subconjuntos localmente mensuráveis de X. Então $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{loc}$. Se $\mathcal{M}_{loc} = \mathcal{M}$, diz-se que μ é *saturada*.

(a) Se μ for σ-finita, então μ é saturada.
(b) $\mathcal{M}_{loc}$ é uma σ-álgebra.
(c) Defina ν em $\mathcal{M}_{loc}$ por $\nu(E) \doteq \mu(E)$ se $E \in \mathcal{M}$ e $\nu(E) \doteq \infty$ caso contrário. Então ν é uma medida saturada em $\mathcal{M}_{loc}$, chamada *saturação* de μ.
(d) Se μ for completa, ν também o é.
(e) Suponha que μ seja semi-finita. Dado $E \in \mathcal{M}_{loc}$, defina $\nu_0(E) \doteq \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{M} \text{ e } A \subset E\}$. Então ν_1 é uma medida saturada em $\mathcal{M}_{loc}$ que estende μ.
(f) Sejam X_1, X_2 conjuntos disjuntos enumeráveis e $X = X_1 \cup X_2$. Sejam $\mathcal{M}$ a σ-álgebra dos conjuntos enumeráveis ou co-enumeráveis em X e μ_0 a medida de contagem em $\mathcal{P}(X_1)$. Defina μ em $\mathcal{M}$ por $\mu(E) \doteq \mu_0(E \cap X_1)$. Então μ é uma medida em $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{loc} = \mathcal{P}(X)$ e, com a notação dos ítens anteriores, $\nu \neq \nu_0$.

1.2 Seção 1.4

Definição 2 *Uma* pré-medida *é uma medida numa álgebra.*

17-) Sejam μ^* uma medida exterior em X e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos μ^*-mensuráveis disjuntos. Então, para todo $E \subset X$, $\mu^*\big(E \cap (\cup_1^\infty A_n)\big) = \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_n)$.

18-) Sejam $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra, $\mathcal{A}_\sigma$ a coleção de todas as uniões enumeráveis de elementos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ a coleção de todas as intersecções enumeráveis de elementos de $\mathcal{A}_\sigma$. Sejam μ_0 uma pré-medida em $\mathcal{A}$ e μ^* a medida exterior por ela induzida.

(a) $\forall E \subset X, \forall \epsilon > 0$, existe $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subset A$ e $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(E) + \epsilon$.
(b) Se $\mu^*(E) < \infty$, então E é μ^*-mensurável se, e somente se, existe $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subset B$ e $\mu^*(B \setminus E) = 0$.
(c) Se μ_0 é σ-finita, a restrição $\mu^*(E) < \infty$ no item anterior é supérflua.

19-) Seja μ^* uma medida exterior em X induzida por uma pré-medida finita μ_0. Dado $E \subset X$, defina a *medida interior* de E por $\mu_*(E) \doteq \mu_0(X) - \mu^*(E^c)$. Então E é μ^*-mensurável `see` $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

20-) Sejam μ^* uma medida exterior em X, $\mathcal{M}^*$ a σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis, $\nu \doteq \mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ e ν^* a medida exterior induzida por ν.

(a) Se $E \subset X$, então $\mu^*(E) \leqslant \nu^*(E)$, valendo a igualdade `see` existir $A \in \mathcal{M}^*$ tal que $E \subset A$ e $\mu^*(E) = \mu^*(A)$.
(b) Se μ^* for induzida por uma pré-medida, então $\mu^* = \nu^*$.
(c) Se $X = \{0, 1\}$, existe uma medida exterior μ^* em X tal que $\mu^* \neq \nu^*$.

21-) Sejam μ^* uma medida exterior induzida por uma pré-medida e μ a restrição de μ^* aos conjuntos μ^*-mensuráveis. Então μ é saturada.

22-) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, μ^* a medida exterior induzida por μ, $\mathcal{M}^*$ a σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis e $\overline{\mu}$ a restrição de μ^* a $\mathcal{M}^*$.

(a) Se μ é σ-finita, $\overline{\mu}$ é o completamento de μ.

(b) Em geral, $\overline{\mu}$ é a saturação do completamento de μ.

23-) Seja $\mathcal{A}$ a coleção de todas as uniões finitas de conjuntos da forma $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, com $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$.

(a) $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathbb{Q}$.

(b) A σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ é $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

(c) Defina μ_0 em $\mathcal{A}$ por $\mu_0(\emptyset) = 0$ e $\mu_0(A) = \infty$ se $A \neq \emptyset$. Então μ_0 é uma pré-medida em $\mathcal{A}$ e existe mais de uma medida em $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ que estende μ_0.

24-) Sejam μ uma medida finita em $(X, \mathcal{M})$ e μ^* a medida exterior induzida por μ. Suponha que $E \subset X$ (não necessariamente mensurável) satisfaça $\mu^*(E) = \mu^*(X)$.

(a) Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \cap E = B \cap E$, então $\mu(A) = \mu(B)$.

(b) Seja $\mathcal{M}_E \doteq \{A \cap E : A \in \mathcal{M}\}$; defina $\nu : \mathcal{M}_E \to [0, \infty]$ por $\nu(A \cap E) \doteq \mu(A)$ (o que é uma boa definição, pelo item anterior). Então $\mathcal{M}_E$ é uma σ-álgebra em E e ν é uma medida em $\mathcal{M}_E$.