MAT234 - Medida e Integração - IME - 2016
Prof. Gláucio Terra

Lista 0 - 02/08/2016

O exercício abaixo foi extraído do *General Topology* do John Kelley.

Sejam f uma função a valores reais, $A \subset \operatorname{dom} f$, $\mathcal{A}$ a família de todos os subconjuntos finitos de A e, para cada $F \in \mathcal{A}$, $S_F \doteq \sum\{f(a) : a \in F\}$. Então, com a relação de inclusão $\subset$, $(\mathcal{A}, \subset)$ é um conjunto dirigido e $(S_F)_{F\in\mathcal{A}}$ é um net a valores em $\mathbb{R}$. Diz-se que f é *somável* em A se o net $(S_F)_{F\in\mathcal{A}}$ for convergente; em caso afirmativo, o limite do referido net chama-se *soma não-ordenada* (ou, simplesmente, *soma*) de f em A, e denota-se por $\sum_A f$ ou $\sum\{f(a) : a \in A\}$.

a) Se $f \geq 0$, então f é somável ***see*** $(S_F)_{F\in\mathcal{A}}$ for limitado superiormente. Enunciado análogo vale se $f \leq 0$.

b) Sejam $A_+ \doteq \{a \in A : a \geq 0\}$ e $A_- \doteq \{a \in A : a < 0\}$. Então f é somável em A ***see*** o for em A_+ e A_-. Em caso afirmativo, $\sum_A f = \sum_{A_+} f + \sum_{A_-} f$.

c) f é somável em A ***see*** $|f|$ for somável em A, onde $|f|(a) \doteq |f(a)|$.

d) Se f for somável em A, então f se anula no complementar de algum subconjunto enumerável de A.

e) Se f e g forem somáveis em A e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha f + \beta g$ é somável em A e $\sum_A(\alpha f + \beta g) = \alpha \sum_A f + \beta \sum_A g$.

f) Se f for somável em A e B, C forem subconjuntos disjuntos de A, então f é somável em B e C e $\sum_{B\cup C} f = \sum_B f + \sum_C f$.

g) Se $A = \mathbb{N}$, relacione a noção de somabilidade com as noções de convergência absoluta ou condicional da série $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$.

h) (Fubinito) Seja f uma função a valores reais cujo domínio contenha o produto $A \times B$.

   i) Se f for somável em $A \times B$, então sua soma coincide com as somas iteradas, i.e. $\sum_{A\times B} f = \sum_A\big(\sum_B f(a,b)\big) = \sum_B\big(\sum_A f(a,b)\big)$.

   ii) Suponha que, para cada $a \in A$, $f(a,b) \geq 0$ para todo $b \in B$ ou $f(a,b) \leq 0$ para todo $b \in B$, e que $F(a) \doteq \sum_B f(a,b)$ defina uma função F somável em A. Então f é somável em $A \times B$.