MAT226 - Equações Diferenciais I - IME - 2013
Prof. Gláucio Terra

Lista 7 - 06/11/2013

NOTAÇÃO. Nesta lista, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\mathsf{E} = \mathbb{K}^n$.

Questão 1-) (desigualdade de Gronwall) Seja $u : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ contínua e não-negativa. Suponha que existam $C \geqslant 0, K \geqslant 0$ tais que:

$$u(t) \leqslant C + \int_0^t K u(s)\,\mathrm{d}s,$$

para todo $t \in [0, \alpha]$. Então:

$$u(t) \leqslant C\,\mathrm{e}^{Kt},$$

para todo $t \in [0, \alpha]$. SUGESTÃO: Prove a desigualdade no caso $C > 0$; o caso $C =$ seguirá como consequência. Para provar o caso $C > 0$, defina $U(t) \doteq C + \int_0^t K u(s)\,\mathrm{d}s$. Note que $U > 0$ e $u \leqslant U$, e verifique que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\log U(t)\right] = U'(t)/U(t) \leqslant K$.

Questão 2-) Sejam $\Omega \subset E$ e $f : \Omega \to E$ com constante de Lipschitz K. Se $y(t)$ e $z(t)$ forem soluções de $\dot{x} = f(x)$ definidas no intervalo $[t_0, t_1]$, então, para todo $t \in [t_0, t_1]$,

$$|y(t) - z(t)| \leqslant |y(t_0) - z(t_0)| \exp[K(t - t_0)].$$

SUGESTÃO: Defina $v(t) \doteq |y(t) - z(t)|$. Aplique a desigualdade de Gronwall (vide questão anterior) para $u(t) \doteq v(t + t_0)$.

Questão 3-) Seja X um campo vetorial de classe C^1 num aberto $\Omega \subset \mathsf{E}$. Mostre que, se $\phi : (\omega_-, \omega_+) \to \Omega$ for uma curva integral maximal de X e se existir $\lim_{t \to \omega_+} \phi(t) = p \in \Omega$, então $\omega_+ = +\infty$ e p é uma singularidade (i.e. um ponto de equilíbrio) de X.

Questão 4-) Seja $X = -\operatorname{grad} \mathrm{V}$, onde V é uma função de classe C^2 definida num aberto $\Omega \subset \mathsf{E}$.

(a) Prove que X não possui órbitas periódicas. SUGESTÃO: Se $\phi(t)$ é uma curva integral regular de X, então $\frac{\mathrm{d}(\mathrm{V} \circ \phi)}{\mathrm{d}t} < 0$, i.e. $f \circ \phi$ é estritamente decrescente.

(b) Suponha que, para todo $c \in \mathbb{R}$, $\mathrm{V}^{-1}(-\infty, c]$ seja um compacto e que as singularidades de $\operatorname{grad} \mathrm{V}$ sejam isoladas. Mostre que, para todo p em Ω, a curva integral maximal de $\dot{x} = -\operatorname{grad} \mathrm{V}(x)$ que se inicia em p, $\gamma_p : J(p) \to \Omega$, está definida para todo $t \geqslant 0$ e que $\lim_{t \to +\infty} \gamma_p(t)$ existe e é uma singularidade de $\operatorname{grad} \mathrm{V}$.

Questão 5-) (critério de Bendixon) Seja $X = (X_1, X_2)$ um campo de classe C^1 em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo. Suponha que:

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \neq 0$$

em todos os pontos de Ω. Então X não tem órbitas periódicas em Ω. SUGESTÃO: Suponha que γ seja uma órbita periódica; aplique o teorema da divergência ao conjunto limitado por γ^*.

Questão 6-) Esboce o retrato de fase do pêndulo simples.

Questão 7-) Encontre a hamiltoniana H do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 + 4x \end{cases}$$

e esboce o retrato de fase correspondente.

Questão 8-) Esboce os retratos de fase dos fluxos gradientes $z' = -\operatorname{grad} \mathrm{V}(z)$, onde $\mathrm{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nos casos abaixo. Identifique os pontos de equilíbrio e classifique-os quanto à estabilidade. Esboce também as superfícies de nível de V.

(a) $\mathrm{V}(x, y) = x^2 + 4y^2$.

(b) $\mathrm{V}(x, y) = 2x^2 - 2xy + 5y^2 + 4x + 4y + 4$.

(c) $\mathrm{V}(x, y) = x \operatorname{sen} y$.

Questão 9-) Encontre uma função de Liapunov estrita para o equilíbrio $(0, 0)$ do sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x - y^2 \\ \dot{y} &= -y - x^2. \end{cases}$$

Questão 10-) Uma partícula de massa m se desloca em um aberto $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ sob a ação de um campo de forças conservativo $F = -\operatorname{grad} \mathrm{V}$, onde $\mathrm{V} : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Assuma que a função horária da partícula $x : J(x) \subset \mathbb{R} \to \Omega_0$ seja solução da equação de Newton $m\ddot{x} = -\operatorname{grad} \mathrm{V}(x)$. O sistema de 1a. ordem correspondente em $\Omega \doteq \Omega_0 \times \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{m} \operatorname{grad} \mathrm{V}(x) \end{cases} \tag{1}$$

(a) Mostre que $E \doteq \frac{1}{2} mv^2 + \mathrm{V}(x)$ é uma integral primeira de (1), i.e. E é constante ao longo das trajetórias do referido sistema.

(b) Todo ponto de equilíbrio de (1) é da forma $(x_0, 0)$, onde x_0 é um ponto crítico de V. Demonstre o *teorema de Lagrange*: se x_0 for um ponto de mínimo local estrito de V, então $(x_0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável. SUGESTÃO: Use a energia mecânica (vide item anterior) para construir uma função de Liapunov.

Questão 11-) Uma partícula se desloca em $\mathbb{R}$ sob a ação de um campo de forças contínuo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo a sua função horária solução da segunda lei de Newton. Suponha que F sempre aponta para a origem e se anula aí; mostre que 0 é um ponto de equilíbrio estável (i.e. $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável do sistema de 1a. ordem associado).