**MAT226 - Equações Diferenciais I - IME - 2013**
Prof. Gláucio Terra

Lista 6 - 11/10/2013

NOTAÇÃO. Nesta lista, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\mathsf{E} = \mathbb{K}^n$.

**Questão 1-)** Seja $A \in \mathsf{L}(\mathsf{E})$. Então a resolvente $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathsf{L}(\mathsf{E})$ da equação $\dot{x} = A \cdot x$ é dada por $R(t, t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}$.

**Questão 2-)** (propriedades da exponencial) Seja $A \in \mathsf{L}(\mathsf{E})$. Então:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tA) = A \exp(tA)$ e $\exp(\mathbb{O}) = \mathrm{id}_{\mathsf{E}}$.
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{(s+t)A} = \mathrm{e}^{sA}\,\mathrm{e}^{tA}$.
3. $\forall t \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{e}^{tA})^{-1} = \mathrm{e}^{-tA}$.
4. Se $B, C \in \mathsf{L}(E)$ e $AC = CB$, então $(\forall t)\, \mathrm{e}^{tA}\, C = C\, \mathrm{e}^{tB}$. Conclua que, se $AB = BA$, então $\mathrm{e}^{tA}\, B = B\, \mathrm{e}^{tA}$ e $\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{tB}\,\mathrm{e}^{tA}$.

OBSERVAÇÃO. Se $A, B \in \mathsf{L}(\mathsf{E})$ não comutam, não é verdade, em geral, que $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B}$!!

**Questão 3-)** Seja $A \in \mathsf{L}(\mathsf{E})$. Alternativamente ao argumento apresentado em aula, também é possível concluir que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\, t^n$ converge uniformemente nos compactos de $\mathbb{R}$ para a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X} = A \cdot X \\ X(0) = \mathrm{id}_{\mathsf{E}} \end{cases} \tag{1}$$

através do método das aproximações sucessivas, conforme descrito a seguir. Dado $R > 0$, seja $S : \mathsf{C}^0\big([-R, R], \mathsf{L}(\mathsf{E})\big) \to \mathsf{C}^0\big([-R, R], \mathsf{L}(\mathsf{E})\big)$ dada por $S\phi(t) \doteq \mathrm{id}_{\mathsf{E}} + \int_0^t A \cdot \phi(s)\, \mathrm{d}s$. Então, conforme já se verificou em aula, $S$ tem um único ponto fixo atrator, o qual é a única solução de (1) em $[-R, R]$. Se $\phi_0(s) = cte. = \mathrm{id}_{\mathsf{E}}$, verifique que $(\forall n \in \mathbb{N}) S^n \phi_0$ coincide com o $n$-ésimo termo da sequência das somas parciais da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\, t^n$; conclua, então, que a referida série converge uniformemente em $[-R, R]$ para a única solução de (1). Como $R > 0$ foi tomado arbitrariamente, segue-se que a referida série converge uniformemente nos compactos de $\mathbb{R}$ para a única solução de (1) em $\mathbb{R}$.

**Questão 4-)** Defina

$$\begin{array}{rccc} T : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathsf{L}(\mathbb{R}^2) \\ & a + ib & \longmapsto & T_{a+ib} \end{array},$$

onde $T_{a+ib}$ é a transformação linear cuja matriz na base canônica é $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Mostre que $T$ é um isomorfismo de anéis e que, $\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $T_{a+ib} \cdot v = (a + ib)(v_1 + iv_2)$, através da identificação $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$.

DEFINIÇÃO 1 $A \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^2)$ *diz-se uma transformação* complexa *se estiver na imagem de* $T$.

(b) Dado $a + ib \in \mathbb{C}$, verifique que $x = (x_1, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é solução de $\dot{x} = T_{a+ib} \cdot x$ `see` $x = x_1 + ix_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ for solução de $\dot{x} = (a + ib)x$.

(c) Conclua que

$$\exp(tT_{a+ib}) = T_{\mathrm{e}^{t(a+ib)}} = \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\operatorname{sen} bt \\ \operatorname{sen} bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

**Questão 5-)** Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $A : I \to \mathsf{L}(\mathsf{E})$ contínua e tal que $(\forall s, t \in I) A(s)A(t) = A(t)A(s)$. Mostre que a resolvente $R : I \times I \to \mathsf{L}(\mathsf{E})$ da equação $\dot{x} = A(t) \cdot x$ é dada por, $\forall t, t_0 \in I$:

$$R(t, t_0) = \exp\Big(\int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s\Big).$$

Mostre, também, que $R(\cdot, t_0) : I \to \mathsf{L}(\mathsf{E})$ é a única solução da equação $\dot{X} = X \cdot A(t)$ que vale $\mathrm{id}_{\mathsf{E}}$ em $t_0$.
SUGESTÃO: Mostre primeiro que $\int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s$ comuta com $A(t)$.

**Questão 6-)** Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo contendo 0 e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva plana, de classe $\mathsf{C}^2$ e parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura $\kappa : I \to \mathbb{R}$. Suponha que $\gamma(0) = (0, 0)$ e que $\gamma'(0) = (1, 0)$. Mostre que, $\forall s \in I$:

$$\gamma(s) = \int_0^s \big(\cos \lambda(t), \operatorname{sen} \lambda(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

onde $\lambda(t) \doteq \int_0^t \kappa(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.
SUGESTÃO: Use a questão anterior para integrar as equações de Serret-Frenet:

$$[T, N]' = [T, N] \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{bmatrix}$$

onde $[T, N]$ denota a matriz cujas colunas são o vetor tangente e o vetor normal à curva.

**Questão 7-)** (algoritmo Putzer, versão II) Propõe-se, neste exercício, uma segunda versão do algoritmo Putzer apresentado em aula. Seja $A \in \mathsf{L}(\mathsf{E})$. Suponha que exista $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ mônico tal que:

(i) $p(A) = 0$,

(ii) $p$ se fatora em $\mathbb{K}[x]$ num produto de fatores lineares, i.e. $p(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - \lambda_i)$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são as raízes de $p(x)$ repetidas com a sua multiplicidade.

Por exemplo, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tome $p$ como sendo o polinômio característico ou o polinômio mínimo de $A$. Mostre que $\mathrm{e}^{At}$ pode ser escrita na forma:

$$\mathrm{e}^{At} = \sum_{k=0}^{m-1} p_{k+1}(t) M_k, \tag{2}$$

onde $M_0 = I \doteq \mathrm{id}_{\mathsf{E}}$, $M_k = \prod_{i=1}^{k}(A - \lambda_i I)$ para $1 \leqslant k \leqslant m - 1$, e $(\forall 1 \leqslant k \leqslant m) p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ é solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \lambda_1 p_1 \\ \dot{p}_k = p_{k-1} + \lambda_k p_k \text{ para } 2 \leqslant k \leqslant m \\ p_1(0) = 1, p_k(0) = 0 \text{ para } 2 \leqslant k \leqslant m \end{cases} \tag{3}$$

ou seja, $p_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$, $p_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_k s}\, p_{k-1}(s)\, \mathrm{d}s$ para $2 \leqslant k \leqslant m$.

Observação. Motivação para se escrever $\mathrm{e}^{At}$ na forma (2) com os coeficientes a determinar: todo polinômio em $A$ é combinação linear das transformações lineares $M_0, \ldots, M_{m-1}$, pelo fato de que o homomorfismo $\mathbb{K}[x] \to \mathsf{L}(\mathsf{E})$ induzido por $A$ (i.e. o homomorfismo que leva $x$ em $A$ e que é a identidade em $\mathbb{K}$) passa para o quociente $\mathbb{K}[x]/\big(p(x)\big)$, e esta última álgebra é gerada, como espaço vetorial, por $\{1, (x-\lambda_1), (x-\lambda_1)(x-\lambda_2), \ldots, \prod_{i=1}^{m-1}(x-\lambda_i)\}$.

**Questão 8-)** Mostre que a complexificação de transformações lineares satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $(\alpha f + \beta g)^{\mathbb{C}} = \alpha f^{\mathbb{C}} + \beta g^{\mathbb{C}}$, se $f, g : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ $\mathbb{R}$-lineares e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) $(f \circ g)^{\mathbb{C}} = f^{\mathbb{C}} \circ g^{\mathbb{C}}$, se $f : \mathsf{V} \to \mathsf{W}$ e $g : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ $\mathbb{R}$-lineares.

(iii) $(\exp A)^{\mathbb{C}} = \exp(A^{\mathbb{C}})$, se $A \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$.

**Questão 9-)** Seja $A \in \mathsf{L}(\mathsf{E})$ tal que todos os autovalores de $A$ estejam no semiplano $\operatorname{Re} z < 0$. Suponha que $f : [t_0, \infty) \to \mathbb{K}$ seja contínua e limitada. Mostre todas as soluções de $\dot{x} = A \cdot x + f(t)$ são limitadas.

**Questão 10-)** Calcule $e^{At}$, nos seguintes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ f ) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**Questão 11-)** Em cada um dos ítens abaixo, resolva o problema de valor inicial dado

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \end{pmatrix} x,\ x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 13 \end{pmatrix}$ b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x,\ x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} x,\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d ) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 10 & 9 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} x,\ x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Questão 12-)** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Mostre que $A(A - 5I) = 0$

2. Determine $e^{At}$.