MAT226 - Equações Diferenciais I - IME - 2013
Prof. Gláucio Terra

Lista 5 - Equações de Diferença Lineares

NOTAÇÃO. Nesta lista, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DEFINIÇÃO 1 (OPERADORES DIFERENÇA E SHIFT) *Seja $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$ (i.e. das sequências em $\mathbb{K}$). Definimos os operadores lineares $E : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (operador* shift*) e $\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (operador* diferença*) por:*

- $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Ex(n) \doteq x(n+1)$.
- $\Delta \doteq E - I$, *onde I denota a identidade. Ou seja,* $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$.

Questão 1-) É fácil ver que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$E^k x(n) = x(n+k).$$

Mostre que:

$$\Delta^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(n+k-i).$$

SUGESTÃO: O fato de E e I comutarem permite que se aplique o teorema do binômio para calcular $(E-I)^k$.

Também é imediato verificar que o operador diferença goza das seguintes propriedades (versão discreta do Teorema Fundamental do Cálculo):

1. $\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0)$.
2. $\Delta\big(\sum_{k=n_0}^{n-1} x(k)\big) = x(n)$.

Questão 2-) Seja $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$. Verifique que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

1. $\Delta p(n) = k a_k n^{k-1} +$ polinômio de grau $< k-1$.
2. $\Delta^2 p(n) = k(k-1) a_k n^{k-2} +$ polinômio de grau $< k-2$.
3. Repetindo o argumento k vezes, conclua que $\Delta^k p(n) = k! a_k$ e, portanto, $\forall m > k$, $\Delta^m p \equiv 0$.

DEFINIÇÃO 2 (POLINÔMIOS FATORIAIS) *Dado $k \in \mathbb{N}$, definimos o* polinômio fatorial $x^{(k)} \in \mathbb{K}[x]$ *por $x^{(k)} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$.*

Note que, se $x = n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant k$, $n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

DEFINIÇÃO 3 (OPERADORES DIFERENÇA E SHIFT) *Seja $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial das funções $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Definimos operadores lineares E e Δ de forma análoga à definição anterior, i.e. $E : \mathbb{K}^{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ e $\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ são definidos por:*

- *$\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, $\forall x \in \mathbb{K}$, $Ef(x) \doteq f(x+1)$.*
- *$\Delta \doteq E - I$, onde I denota a identidade. Ou seja, $\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, $\forall x \in \mathbb{K}$, $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.*

Note que E e Δ comutam com restrições a $\mathbb{N}$, i.e. $\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, $(Ef)|_{\mathbb{N}} = E(f|_{\mathbb{N}})$ e $(\Delta f)|_{\mathbb{N}} = \Delta(f|_{\mathbb{N}})$.

Questão 3-) Com a notação acima, dados $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{K}$, verifique:

1. $\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ com $k \geqslant n$, $\Delta^n x^{(k)} = k^{(n)} x^{(k-n)}$. Em particular, $\Delta^k x^{(k)} = k!$.

Questão 4-) (operador antidiferença) (a) Verifique que o conjunto $\mathcal{C} \doteq \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x \text{ constante}\}$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e coincide com o núcleo de $\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Conclua que, por passagem ao quociente, Δ induz um isomorfismo linear $\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}}/\mathcal{C} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, cujo inverso $\Delta^{-1} : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}/\mathcal{C}$ é chamado de *operador antidiferença.*

(b) Mais geralmente, dado $k \in \mathbb{N}$, o núcleo de $\Delta^k : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ é o subespaço $P_{k-1} \doteq \{p : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ polinomial de grau $\leqslant k-1\}$. Portanto, por passagem ao quociente, Δ^k induz um isomorfismo linear $\Delta^k : \mathbb{K}^{\mathbb{N}}/P_{k-1} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, cujo inverso é denotado por $\Delta^{-k} : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}/P_{k-1}$.

(c) $\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\Delta^{-1} f(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i) + c$

(d) $\Delta^{-k}\, 1(n) = \frac{n^k}{k!} + c_{k-1}n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + \cdots + c_0$

(e) $\Delta^{-1}\, n^{(k)} = \frac{n^{(k+1)}}{k+1} + c$

Sugestão: Nos ítens (c) e (e), aplique Δ a ambos os membros e use as questões anteriores; no item (d), aplique Δ^k a ambos os membros.

Questão 5-) (teorema de Newton) Seja $f(n)$ polinomial de grau k, i.e. $f \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ é tal que $(\exists p(x) \in \mathbb{K}[x], \forall n) f(n) = p(n)$, com p de grau k. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\Delta^i f(0)}{i!}\, n^{(i)},$$

onde $\Delta^0 \doteq \mathrm{id}$ e $n^{(0)} \doteq 1$.

Sugestão: Se f é polinomial de grau k, então Δf é polinomial de grau $k-1$, conforme a questão **2-)**. Argumente por indução sobre k.

Definição 4 *Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Denote por $\mathsf{M}(\lambda) : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ o operador linear dado por $\mathsf{M}(\lambda) \cdot x(n) \doteq \lambda^n x(n)$. Note que, se $\lambda \neq 0$, $\mathsf{M}(\lambda)$ é um isomorfismo linear cujo inverso é $\mathsf{M}(\lambda^{-1})$.*

Notação. Dados $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, usaremos a notação abreviada $\lambda^n x \doteq \mathsf{M}(\lambda) \cdot x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Questão 6-) Seja $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(a) Mostre que, $\forall x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\Delta \cdot \lambda^{-n} x = \lambda^{-(n+1)}(E - \lambda) \cdot x$, i.e. $\Delta \circ \mathsf{M}(\lambda^{-1}) = \lambda^{-1}\mathsf{M}(\lambda^{-1})(E - \lambda)$. Conclua que

$$E - \lambda = \lambda^{(n+1)} \Delta \lambda^{-n},$$

onde o segundo membro é uma notação abreviada para $\lambda \mathsf{M}(\lambda) \circ \Delta \circ \mathsf{M}(-\lambda)$.

(b) Use o item anterior para mostrar, por indução sobre $k \in \mathbb{N}$, que:

$$(E-\lambda)^k = \lambda^{(n+k)}\Delta^k \lambda^{-n}.$$

(c) Mostre, a partir do item anterior e da questão **4-)**, que $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ está no núcleo de $(E-\lambda)^k$ se, e somente se, existir p polinomial de grau menor ou igual a $k-1$ tal que $(\forall n)x(n) = p(n)\lambda^n$. Conclua que:

$$\{\lambda^n, n\lambda^n, \dots, n^{k-1}\lambda^n\}$$

é uma base de $\ker(E-\lambda)^k$.

Definição 5 (equações de diferenças lineares, com coeficientes constantes) *Dados $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ com $a_0 \neq 0$, e $b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, a equação:*

$$x(n+k) + a_{k-1}x(n+k-1) + \cdots + a_0 x(n) = b(n) \tag{1}$$

chama-se equação de diferenças linear, com coeficientes constantes, de ordem k. *Uma solução da referida equação é uma sequência $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ que verifique (1) para todo $n \in \mathbb{N}$.*

A equação:

$$x(n+k) + a_{k-1}x(n+k-1) + \cdots + a_0 x(n) = 0 \tag{2}$$

chama-se homogênea *associada a* (1).

É fácil verificar que o conjunto S das soluções de (1) é um subespaço afim de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, cujo espaço vetorial subjacente é o espaço S_h das soluções da homogênea associada (2): se x_p for uma solução particular de (1), então $S = x_p + S_h$.

Questão 7-) (equações de diferenças lineares homogêneas, com coeficientes constantes) Dados $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ com $a_0 \neq 0$, considere a equação homogênea (2). Se $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ é dado por $P(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$, então o espaço das soluções da referida equação coincide com o núcleo do operador linear $P(E) : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(i) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, escreva a decomposição de $P(x)$ em fatores irredutíveis na forma $\prod_i (x-\lambda_i)^{r_i}$, com $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ (i.e., para cada i, λ_i é raiz de $P(x)$ com multiplicidade r_i).

(ii) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, escreva a decomposição de $P(x)$ em fatores irredutíveis na forma $\prod_i (x-\lambda_i)^{r_i} \prod_j [(x-a_j)^2 + b_j^2]^{s_j}$ (i.e. para cada i, λ_i é raiz de $P(x)$ com multiplicidade r_i e, para cada j, $a_j \pm i b_j$ são raízes complexas de $P(x)$ com multiplicidade s_j).

Em cada um dos casos acima, exiba uma base do espaço S_h das soluções da equação homogênea (2). Sugestão: Analogamente ao que se fez em aula para equações diferenciais, aplique o teorema da decomposição primária para o operador E e use a questão **6-)**.

Questão 8-) Para se encontrar uma solução particular da equação não-homogênea (1), os métodos dos coeficientes a determinar e da variação dos parâmetros vistos para equações diferenciais podem ser adaptados. Por exemplo, se existir $Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $Q(E) \cdot b = 0$, aplique $Q(E)$ a ambos os membros da equação $P(E)x = b$ e conclua que toda solução da mesma é solução da equação homogênea $(P \cdot Q)(E)x = 0$; então basta escrever a solução geral da última equação, com os coeficientes a determinar, omitindo-se os termos que são anulados por $P(E)$.

Encontre a solução geral da equação:

$$x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = n2^n.$$

Questão 9-) (sequência de Fibonacci) Quantos pares de coelhos haverá após n meses, começando-se com um par de coelhos maduros, se cada par de coelhos, após atingir a maturidade aos dois meses de idade, gerar um novo par a cada mês? Mostre que, se $x(n)$ for o referido número de pares, então:

$$\frac{x(n+1)}{x(n)} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$