MAT226 - Equações Diferenciais I - IME - 2013
Prof. Gláucio Terra

Lista 4 - 01/10/2013

Notação. Nesta lista, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\mathsf{E} = \mathbb{K}^n$.

Questão 1-) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $A : I \to \mathsf{L}(\mathsf{E})$ contínua. Denote por $R(x, x_0)$ a resolvente da equação:

$$y' = A(x) \cdot y \tag{1}$$

i.e. para cada $x_0 \in I$, $R(\cdot, x_0) : I \to \mathsf{L}(\mathsf{E})$ é a única solução da equação matricial $Y' = A(x) \cdot Y$ tal que $R(x_0, x_0) = \mathrm{id}_{\mathsf{E}}$.

Fixe uma base ordenada ε de E e identifique $\mathsf{L}(E)$ com $\mathsf{Mat}(n, \mathbb{K})$ através desta base (associando cada transformação à sua matriz com respeito à referida base). Dadas $\phi_1, \ldots, \phi_n : I \to \mathsf{E}$ soluções da equação homogênea (1), denote por $\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_n] : I \to \mathsf{Mat}(n, \mathbb{K})$ a função matricial cuja i-ésima coluna é a matriz das coordenadas de ϕ_i com respeito a ε.

(a) Mostre que $\phi(x) = R(x, x_0)\phi(x_0)$.

(b) Conclua que $\det \phi$ se anula identicamente ou não se anula em ponto algum; $\phi_1, \ldots, \phi_n$ são linearmente dependentes no primeiro caso, e linearmente independentes no segundo.

(c) Se $\phi_1, \ldots, \phi_n$ forem linearmente independentes, diz-se que ϕ é uma *matriz fundamental* para a equação (1). Verifique que, se ϕ for uma matriz fundamental e $C \in \mathsf{Mat}(n, \mathbb{K})$ for não singular, então $\phi \cdot C$ também é matriz fundamental e toda matriz fundamental é dessa forma.

(d) Se $\phi : I \to \mathsf{Mat}(n, \mathbb{K})$ for uma matriz fundamental, a resolvente de (1) pode ser calculada pela igualdade $R(x, x_0) = \phi(x) \cdot \phi(x_0)^{-1}$.

Questão 2-) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $b, a_0, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ contínuas. Considere a EDO linear de ordem n:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x) \tag{2}$$

e a EDO linear de ordem 1:

$$y' = A(x) \cdot y + B(x) \tag{3}$$

onde:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ b(x) \end{bmatrix}$$

Então, conforme visto em aula, $y : I \to \mathbb{K}$ é solução de (2) `see` $(y, y', \ldots, y^{(n-1)}) : I \to \mathbb{K}^n$ for solução de (3), e toda solução de (3) é dessa forma.

(a) Verifique que, dado $x_0 \in I$, a resolvente da equação homogênea associada a (3) é dada pela matriz $R(x,x_0) = [R_1(x,x_0),\ldots,R_n(x,x_0)]$ cuja i-ésima coluna é dada por:

$$R_i(x,x_0) = \begin{bmatrix} r_i(x,x_0) \\ r_i'(x,x_0) \\ \vdots \\ r_i^{(n-1)}(x,x_0) \end{bmatrix}$$

onde $r_i(x,x_0)$ é a solução da homogênea associada a (2) com condição inicial $r_i^{(j)}(x,x_0) = \delta_{i-1}^{j}$, para $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

(b) (FÓRMULA DE ABEL-LIOUVILLE) Sejam $y_1,\ldots,y_n : I \to \mathbb{K}$ soluções da homogênea associada a (2). Para $1 \leqslant i \leqslant n$, defina:

$$Y_i(x) \doteq \begin{bmatrix} y_i(x) \\ y_i'(x) \\ \vdots \\ y_i^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

e $Y(x) \doteq [Y_1(x),\ldots,Y_n(x)]$. Então, $\forall x, x_0 \in I$, $Y(x) = R(x,x_0)\cdot Y(x_0)$. Conclua, a partir do teorema de Liouville, que o wronskiano $W = W(y_1,\ldots,y_n) \doteq \det Y$ é dado por:

$$W(x) = \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s\Big)W(x_0). \tag{4}$$

Conclua que W se anula identicamente (caso em que $y_1,\ldots,y_n$ são l.d.) ou não se anula em ponto algum (caso em que $y_1,\ldots,y_n$ são l.i.).

(c) (VARIAÇÃO DAS CONSTANTES) Com a notação do ítens anteriores, use a fórmula da variação das constantes demonstrada em aula para concluir que a solução de (2) com condição inicial $\big(y(x_0),\ldots,y^{(n-1)}(x_0)\big)$ nula é dada por:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} r_n(x,s)b(s)\,\mathrm{d}s \tag{5}$$

Conclua a partir da questão anterior que, se $n = 2$ e $y_1, y_2 : I \to \mathbb{K}$ forem soluções linearmente independentes da homogênea associada a (2), então:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} b(s)\frac{y_2(x)y_1(s) - y_1(x)y_2(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,\mathrm{d}s \tag{6}$$

Questão 3-) Mostre que, se $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ for contínua e limitada, toda solução da EDO $y'' + 5y' + 4y = f$ é limitada. SUGESTÃO: Use a fórmula da variação das constantes (6) para escrever a solução geral.

Questão 4-) Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$, $P(x), f(x) \in \mathbb{K}[x]$, com P mônico e f de grau menor ou igual a m. Seja $r \geqslant 0$ a multiplicidade de λ como raiz de $P(x)$ ($r = 0$ se não for raiz). Mostre que a EDO linear não-homogênea $P(D)y = f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ admite uma solução particular da forma $x^r q(x) e^{\lambda x}$, onde $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ com grau menor ou igual a m.

Questão 5-) Encontre a solução geral das equações diferenciais abaixo:

(a) $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$
(b) $y''' + 6y'' + 13y' = 0$
(c) $2y''' + y'' - 8y' - 4y = 0$
(d) $y^{(4)} - y'' = 0$
(e) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$
(f) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$

Questão 6-) Dê a forma do candidato a solução particular prescrito pelo método dos coeficientes a determinar para cada uma das equações abaixo.

(a) $y''' - 2y'' + y' = x^3 + 2\,\mathrm{e}^x$
(b) $y''' - y' = x\,\mathrm{e}^{-x} + 2\cos x$
(c) $y^{(4)} - 2y'' + y = \mathrm{e}^x + \cos x$
(d) $y^{(4)} + 2y'' = \cos(2x) + x\,\mathrm{e}^x + 4$
(e) $y^{(4)} - y''' - y'' + y' = x^2 + 4 + x\cos x$
(f) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 2x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\cos x$

Questão 7-) Resolva, explicitando o domínio da solução maximal, o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \sec x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Questão 8-) Seja L o operador linear:

$$L: \begin{array}{ccc} \{y \in \mathsf{C}^2([0,2\pi]) : y'(0) = y'(2\pi) = 0\} & \longrightarrow & \mathsf{C}^0([0,2\pi]) \\ y & \longmapsto & y'' + y \end{array}.$$

(a) Mostre que o núcleo de L é gerado por $\cos x$.
(b) Mostre que $f \in \mathsf{C}^0([0,2\pi])$ pertence à imagem de L ***see*** $\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0$.

Questão 9-) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo com $0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua.

(a) Aplique o método da variação dos parâmetros à equação $y'' - y = f(x)$, partindo-se das soluções $\phi_1(x) = \cosh x$ e $\phi_2(x) = \sinh x$ da equação homogênea associada. Conclua que a solução geral da referida equação pode ser descrita por:

$$c_1 \cosh x + c_2 \sinh x + \int_0^x \sinh(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t,$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Mostre que é inversível o operador L definido por:

$$L: \begin{array}{ccc} \{y \in \mathsf{C}^2([0,1]) : y(0) = y(1), y'(0) = y'(1)\} & \longrightarrow & \mathsf{C}^0([0,1]) \\ y & \longmapsto & y'' - y \end{array}$$

Questão 10-) Para cada uma das equações abaixo, é dada uma solução ϕ_1. Encontre uma solução ϕ_2, linearmente independente de ϕ_1, no intervalo indicado. SUGESTÃO: Use a fórmula de Abel-Liouville (4).

(a) $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$, $\phi_1(x) = \exp(x^2)$, $-\infty < x < \infty$.

(b) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $\phi_1(x) = x$, $0 < x < 1$.

(c) $xy'' - (x + 1)y' + y = 0$, $\phi_1(x) = \exp(x)$, $x > 0$.