

MAT226 - Equações Diferenciais I - IME - 2013

Prof. Gláucio Terra

Lista 3 - 18/09/2013

Questão 1- Sejam $a < b$ reais, $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $f : [a, b] \times E \rightarrow E$ contínua e Lipschitz na segunda variável. Mostre que, $\forall (t_0, x_0) \in [a, b] \times E$, existe uma única $\phi : [a, b] \rightarrow E$ solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

SUGESTÃO: Defina $S : C^0([a, b], E) \rightarrow C^0([a, b], E)$ por $S\varphi(t) \doteq x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$ (verifique que está bem definida) e repita o argumento do teorema de Picard.

Questão 2- (TRANSFORMAÇÕES LINEARES CONTÍNUAS EM ESPAÇOS NORMADOS, PARTE I) Sejam E e F espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $T : E \rightarrow F$ linear. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

- (i) f é uniformemente contínua;
- (ii) f é contínua;
- (iii) f é contínua no $\mathbb{O}$;
- (iv) f é limitada em alguma vizinhança do $\mathbb{O}$;
- (v) $\exists M \geq 0$ tal que $(\forall x \in E) \|f(x)\| \leq M\|x\|$.

SUGESTÃO: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) são imediatas. Verifique (iv) $\Rightarrow$ (v) e (v) $\Rightarrow$ (i).

Questão 3- (TRANSFORMAÇÕES LINEARES CONTÍNUAS EM ESPAÇOS NORMADOS, PARTE II) Sejam E e F espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $T : E \rightarrow F$ linear contínua. Então:

$$\begin{aligned} \inf\{M > 0 : \forall x \in E, \|T(x)\| \leq M\|x\|\} &= \\ = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} &= \\ = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

Além disso, dada $f \in L(E, F) \doteq \{T : T : E \rightarrow F \text{ linear contínua}\}$, defina $\|f\| \doteq \sup\{\|f(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$. Então $\|\cdot\| : L(E, F) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma norma, munido da qual $L(E, F)$ é um espaço de Banach se F o for.

SUGESTÃO: Para mostrar que $L(E, F)$ é completo, tome $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de Cauchy em $L(E, F)$ e mostre que: (1) a referida sequência é uniformemente Cauchy em $B_E \doteq \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, portanto uniformemente convergente em B_E (pela completeza de F); (2) sendo uniformemente convergente em B_E , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é pontualmente convergente em B_E e, usando a linearidade das f_n , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deve ser pontualmente convergente em E ; (3) $f(x) \doteq \lim f_n(x)$ define uma função linear contínua em E e $f_n \rightarrow f$ em $L(E, F)$.

Questão 4-) Sejam E e F espaços vetoriais normados, com E de dimensão finita. Mostre que toda aplicação linear $T : E \rightarrow F$ é contínua.

Questão 5-) (a) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo compacto, $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $L(E) \doteq L(E, E)$, $A : I \rightarrow L(E)$ e $B : I \rightarrow E$ contínuas. Então, $\forall (t_0, x_0) \in I \times E$, existe uma única solução $\phi : I \rightarrow E$ da EDO linear $\dot{x} = A(t) \cdot x + B(t)$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$. SUGESTÃO: Mostre que o segundo membro da referida equação define uma função $I \times E \rightarrow E$ contínua e Lipschitz na segunda variável, e então use a questão 1-).

(b) Demonstre o item anterior com a hipótese de que I seja um intervalo não-degenerado.

Questão 6-) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo não-degenerado, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t, x) = g(t)|x|$. Mostre que, $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, existe uma única solução $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de $\dot{x} = f(t, x)$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Questão 7-) Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$.

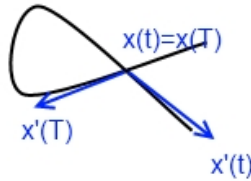
(a) Encontre o conjunto das soluções maximais da equação $y' = f(x, y)$.

(b) Para a equação do item anterior, vale a propriedade da unicidade de soluções? Caso a sua resposta seja negativa, isto contraria o teorema de Picard?

Questão 8-) Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e suponha que $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

É possível que existam $t \neq T$ tais que (i) $\phi(t) = \phi(T)$ e (ii) $\phi'(t)$ e $\phi'(T)$ linearmente independentes? Em caso afirmativo, isto contraria a unicidade de soluções dada pelo TEU?



SUGESTÃO: Note que $\frac{d}{dt}(t \sin t) = t \cos t + \sin t$ e $\frac{d}{dt}(t^2 \sin t) = t^2 \cos t + 2t \sin t$. Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solução de (1) que passa por $(0, 0)$. Calcule $\phi(\pi)$, $\phi(2\pi)$, $\phi'(\pi)$ e $\phi'(2\pi)$.

Questão 9-) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e suponha que $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

É possível que existam $t \neq T$ tais que (i) $\phi(t) = \phi(T)$ e (ii) $\phi'(t) \neq \phi'(T)$? Compare com a questão anterior.

Questão 10-) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, com f Lipschitz. Mostre que vale a propriedade da unicidade de soluções para o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ \dot{y} = g(x)y, \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

Questão 11-) Sejam $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$ aberto, $f : \Omega \rightarrow E$ contínua e localmente Lipschitz na segunda variável.

(a) Se $\phi : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow E$ for solução maximal de $\dot{x} = f(t, x)$ (onde $\omega_{\pm} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), não é verdade, em geral, que existam $\lim_{t \rightarrow \omega_+} \phi(t)$ ou $\lim_{t \rightarrow \omega_-} \phi(t)$, mesmo que $\omega_{\pm}$ sejam finitos.

Dê um contra-exemplo. SUGESTÃO: $\frac{d}{dt} (\sin 1/t) = -\frac{\cos 1/t}{t^2}$.

(b) No entanto, se f for limitada em Ω , digamos, $\|f\| \leq M$, e se $\omega_+ \in \mathbb{R}$, mostre que existe $x_+ \doteq \lim_{t \rightarrow \omega_+} \phi(t)$, e que $(\omega_+, x_+) \in \partial\Omega$, e um enunciado análogo vale se $\omega_- \in \mathbb{R}$.

Questão 12-) Sejam $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $f : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ contínua e localmente Lipschitz na segunda variável. Mostre que, se f for limitada, toda solução maximal de $\dot{x} = f(t, x)$ é global. SUGESTÃO: Use a questão anterior.

Questão 13-) Sejam $X = (X_1, \dots, X_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e tal que $(\forall x \in \mathbb{R}^n) \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) X_i(x) \leq 0$ e $V(x) \geq \|x\|^2$. Mostre que, se $x : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ for solução maximal de $\dot{x} = X(x)$, então $\omega_+ = \infty$.