**MAT226 - Equações Diferenciais I - IME - 2012**
Prof. Gláucio Terra

Lista 2 - 19/08/2013

**Questão 1-)** (a) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $f$ e $g$ funções contínuas num intervalo não-degenerado $I$. Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)y^\alpha$$

é denominada uma *equação de Bernoulli*. Mostre que a mudança $z = y^{1-\alpha}$ transforma uma equação de Bernoulli numa equação linear.

(b) Encontre as soluções maximais das seguintes equações:

1. $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$
2. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^{\frac{1}{2}}$

**Questão 2-)** (Equações homogêneas) (a) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considere a equação $\dot{x} = f(\frac{x}{t})$, $t \neq 0$. Prove que a mudança de variáveis $x = yt$ a transforma numa equação a variáveis separadas.

(b) Seja $u$ uma função de classe $\mathsf{C}^1$ definida num *cone* aberto $\Omega$ de $\mathbb{R}^2$ (i.e. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto tal que, se $(x, y) \in \Omega$ e $\lambda > 0$, então $(\lambda x, \lambda y) \in \Omega$). Suponha que $u$ seja *homogênea de grau* $p$, i.e. $\forall (x, y) \in \Omega, \forall \lambda > 0$, $u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p u(x, y)$. Mostre que $u$ satisfaz a equação diferencial parcial $pu = xu_x + yu_y$ (Sugestão: derive com respeito a $\lambda$ e depois faça $\lambda = 1$ ).

(c) Sejam $M$ e $N$ de classe $\mathsf{C}^1$ e homogêneas de grau $p$ definidas num cone aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{O}\}$. Suponha que $xM(x, y) + yN(x, y)$ não se anule. Mostre que $\mu(x, y) \doteq [xM(x, y) + yN(x, y)]^{-1}$ é um fator integrante para a EDO $N(x, y)y' + M(x, y) = 0$.

**Questão 3-)** Mostre que, utilizando mudanças de coordenadas convenientes, podemos transformar equações da forma:

$$\dot{x} = \frac{a_1x + b_1t + c_1}{a_2x + b_2t + c_2}$$

em equações homogêneas ou de variáveis separadas. Sugestão: Se $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, faça $x = u + \alpha$ e $t = s + \beta$; caso contrário, faça $u = a_1x + b_1t$.

Resolva o problema de Cauchy

$$\dot{x} = \frac{2x + t - 1}{x + 2t + 1}, \quad x(0) = 1.$$

**Questão 4-)** Resolva cada um dos problemas de valor inicial

1. $2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0$, $y(1) = 1$
2. $3x^2 + 4xy + (2y^2 + 2x^2)\frac{dy}{dx} = 0$, $y(0) = 1$

**Questão 5-)** Determine um fator integrante e resolva:

1. $3xy + y^2 + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0$
2. $(x^2 + y^2) + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)\frac{dy}{dx} = 0$
3. $(3y^2 - x^2 + 1) + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$

**Questão 6-)** Seja $n$ inteiro, $n > 1$. Determine a família de curvas ortogonais à família $y = \lambda x^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in (0, \infty)$. Esboce graficamente a referida família.