MAT226 - Equações Diferenciais I - IME - 2012
Prof. Gláucio Terra

Lista 1 - 06/08/2013

Questão 1-) Verifique que as funções $y_1(x) \doteq \cos(\ln x)$ e $y_2(x) \doteq \operatorname{sen}(\ln x)$, definidas em $(0, \infty)$, são soluções da equação $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Questão 2-) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, mostre que $y(x) \doteq \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ é solução do problema de Cauchy $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$.

Questão 3-) (EQUAÇÕES ESCALARES AUTÔNOMAS) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo não-degenerado e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Considere a equação $\dot{x} = f(x)$.

(i) Fixado a em I, seja $F : I \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) \doteq \int_a^x \frac{1}{f(s)}\,\mathrm{d}s$. Mostre que as soluções maximais da equação $\dot{x} = f(x)$ são descritas pela família $x(t) = \phi(t-c)$, definida para $t-c$ na imagem de F, onde ϕ é a função inversa de F e c uma constante real. Em particular, se F é sobre $\mathbb{R}$, todas as soluções maximais são *globais* (i.e. definidas em $\mathbb{R}$); verifique que este é o caso se $I = \mathbb{R}$ e se f for limitada.

(ii) Para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times I$, demonstre a existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy com condição inicial (t_0, x_0).

Questão 4-) (EQUAÇÕES COM VARIÁVEIS SEPARADAS) Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas, com I e J intervalos não-degenerados. Suponha que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Considere a equação $\dot{x} = f(x)g(t)$.

(i) Fixados a em I e b em J, sejam $F : I \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) \doteq \int_a^x \frac{1}{f(s)}\,\mathrm{d}s$ e $G : J \to \mathbb{R}$ dada por $G(t) \doteq \int_b^t g(s)\,\mathrm{d}s$. Mostre que as soluções de $\dot{x} = f(x)g(t)$ são as funções deriváveis $x = x(t)$ definidas implicitamente pela equação $F(x) = G(t) - c$, com c constante real, i.e. as funções deriváveis $x : J_x \to \mathbb{R}$, com $J_x \subset J$ intervalo não-degenerado, tais que $\operatorname{Im} x \subset I$ e $(\forall t \in J_x) F\big(x(t)\big) = G(t) - c$. Conclua que, sendo ϕ a inversa de F e $A_c \doteq \{t \in J : G(t) - c \in \operatorname{Im} F\}$, toda solução maximal é da forma $x(t) = \phi\big(G(t) - c\big)$, definida em alguma *componente conexa* de A_c (i.e. um subconjunto conexo maximal de A_c; como os subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos, segue-se que uma componente conexa de A_c é um intervalo maximal contido em A_c, i.e. que não seja subintervalo próprio de nenhum outro intervalo contido em A_c) que não seja um conjunto unitário.

(ii) Para cada $(t_0, x_0) \in J \times I$, demonstre a propriedade da unicidade de soluções para o problema de Cauchy com condição inicial (t_0, x_0). Se x_0 estiver no interior de J, mostre que existe uma solução com condição inicial (t_0, x_0) (SUGESTÃO: a unicidade é trivial; para a existência, em (i) tome $a = x_0$, $b = t_0$ e $c = 0$; verifique que t_0 pertence a algum subintervalo não degenerado de A_c).

Questão 5-) Encontre todas as soluções maximais das equações:

(a) $y''' = x^2$
(b) $3y' + y = 2e^{-x}$
(c) $y' - 2xy = x$
(d) $y' = (1 + x)(1 + y)$
(e) $y' = 1 + y^2$

Questão 6-) Para cada uma das funções $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, considere a EDO definida por f, i.e. $y' = f(x, y)$. Encontre as soluções maximais desta equação e, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, discuta a existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy com condição inicial (x_0, y_0). Faça um esboço dos gráficos das soluções obtidas.

(a) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) \doteq \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.
(b) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) \doteq (xy)^2 - 4x^2$.
(c) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) \doteq xy^3$.
(d) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) \doteq x|y|$.
(e) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) \doteq 5(y - 1)^{4/5}$.
(f) $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty)$, $f(x, y) \doteq 2y^{1/2}$.

Questão 7-) Encontre as soluções maximais das equações abaixo. Faça um esboço dos gráficos das soluções obtidas.

(a) $(x + 3y) - xy' = 0$
(b) $xy' = y$
(c) $xy' = -y$

Questão 8-) Determine o tempo necessário para se esvaziar um tanque cilíndrico de raio 2 m e altura 4 m, cheio d'água, admitindo que a água se escoe através de um orifício, situado na base do tanque, de raio 0.1 m, com uma velocidade $v = \sqrt{2gh}$, sendo h a altura do nível da água no tanque e $g = 10m/s^2$ a aceleração da gravidade.

Questão 9-) Quando uma gota de chuva cai, ela aumenta de tamanho, de modo que sua massa varia com o tempo; digamos, sua massa em um instante t é $m(t)$. A taxa temporal do aumento de massa é $km(t)$, para alguma constante positiva k. Aplicando-se a segunda lei de Newton ao movimento da gota, obtém-se $(mv)' = mg$, onde v é a velocidade da gota de chuva (dirigida para baixo) e g é a aceleração da gravidade. A velocidade terminal da gota de chuva é $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Determine a velocidade terminal em função de g e k.

Questão 10-) Uma pessoa P, começando na origem, move-se no sentido positivo do eixo x, puxando um peso Q ao longo da curva C, chamada de *tratriz*, conforme mostra a figura 1. O peso, inicialmente localizado sobre o eixo y em $(0, s)$, é puxado por uma corda de comprimento constante s, a qual é mantida esticada durante todo o movimento. Suponha que a corda seja sempre tangente a C. Encontre uma uma equação diferencial para a trajetória do peso e resolva o problema de Cauchy com condição inicial $(0, s)$.