MAT 226 - Equações Diferenciais I
P3 - 04 de Dezembro de 2013
Professor: Gláucio Terra

Nome:______________________________________ | Nota: |

Assinatura:__________________________________

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!

QUESTÃO **1.** (2,5 ptos.) *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $A : I \to \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ contínua e tal que $(\forall s, t \in I) A(s)A(t) = A(t)A(s)$. Mostre que a resolvente $R : I \times I \to \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ da equação $\dot{x} = A(t) \cdot x$ é dada por, $\forall t, t_0 \in I$:*

$$R(t, t_0) = \exp\Big(\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s\Big).$$

Mostre, também, que $R(\cdot, t_0) : I \to \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ é a única solução da equação $\dot{X} = X \cdot A(t)$ que vale $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ em t_0.

QUESTÃO **2.** (2,5 ptos.) *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Mostre que $A(A - 5I) = 0$*
2. *Determine e^{At}.*

QUESTÃO **3.** (2,5 ptos.) *Seja X um campo vetorial de classe C^1 num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que, se $\phi : (\omega_-, \omega_+) \to \Omega$ for uma curva integral maximal de X e se existir $\lim_{t \to \omega_+} \phi(t) = p \in \Omega$, então $\omega_+ = +\infty$ e p é uma singularidade (i.e. um ponto de equilíbrio) de X.*

QUESTÃO **4.** (2,5 ptos.) *Encontre a hamiltoniana H do sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 + 4x \end{cases}$$

e esboce o retrato de fase correspondente. Identifique os pontos de equilíbrio e classifique-os quanto à estabilidade.