

MAT 226 - Equações Diferenciais I
P1 - 11 de Setembro de 2013
Professor: Gláucio Terra

Nome:_____	Nota:_____
No. USP:_____ RG:_____	
Assinatura:_____	

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!

QUESTÃO 1. *Encontre, caso exista(m), a(s) solução(ões) maximal(ais) dos problemas de Cauchy:*

(a) (2 ptos.) $y' = x^2 y^2$, $y(0) = 1$.

Como $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 y^2$ é de classe C^1 , o teorema de existência e unicidade nos permite concluir que o referido problema de Cauchy admite uma única solução maximal. Separando-se as variáveis, conclui-se que $y : (-\infty, \sqrt[3]{3}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y(x) = \frac{1}{1-x^3/3}$ é solução, e é maximal (pois $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{3}} y(x) = +\infty$); portanto, trata-se da única solução maximal pedida.

(b) (2 ptos.) $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 1$.

Por um argumento análogo ao usado na resolução de $y' = 2x^{1/2}$, feita em aula, o conjunto das soluções maximais é $\{y_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid c \geq 1\}$, onde $(\forall c \geq 1)$:

$$y_c(x) = \begin{cases} (x+c)^3, & \text{se } x < -c, \\ 0, & \text{se } -c \leq x \leq -1, \\ (x+1)^3, & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

QUESTÃO 2. (2 ptos.) *Encontre as soluções maximais da equação $(x+3y) - xy' = 0$.*

Conforme resolução feita em aula, o conjunto das soluções maximais é $\{y_{c,c'} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid c, c' \in \mathbb{R}\}$, onde $(\forall c, c' \in \mathbb{R})$:

$$y_{c,c'}(x) = \begin{cases} cx^3 - \frac{1}{2}x, & \text{se } x \geq 0, \\ c'x^3 - \frac{1}{2}x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

QUESTÃO 3. (1 pto.) *Determine um fator integrante e resolva a equação $(x^2+y^2) + (x^3+3xy^2+2xy)\frac{dy}{dx} = 0$.* OBS.: As soluções podem ser dadas implicitamente.

e^{3y} é fator integrante; as soluções são, para cada $c \in \mathbb{R}$, as funções diferenciáveis $y = y(x)$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo não-degenerado $I \subset \mathbb{R}$, dadas implicitamente por:

$$\frac{(3xy^2 + x^3)e^{3y}}{3} = c.$$

QUESTÃO 4. (a) (0,5 pto.) *Encontre as soluções constantes de $y' = (y^2 - 1)(y^2 - 9)$.*

As soluções constantes são as funções $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $y \equiv -1$ ou $y \equiv 1$ ou $y \equiv -3$ ou $y \equiv 3$.

(b) (1 pto.) *Mostre que, dados $I \subset \mathbb{R}$ intervalo não-degenerado e $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ solução do problema de Cauchy $y' = (y^2 - 1)(y^2 - 9)$, $y(0) = 0$, então $(\forall x \in I)|y(x)| < 1$. SUGESTÃO: Use a unicidade.*

Note que, como $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (y^2 - 1)(y^2 - 9)$ é de classe C^1 , o teorema de existência e unicidade se aplica à equação $y' = (y^2 - 1)(y^2 - 9)$.

Suponha que $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma tal solução e que exista $x \in I$ tal que $y(x) \geq 1$. Como y é contínua, I é um intervalo e $y(0) = 0$, o teorema do valor intermediário garante a existência de um $x_0 \in I$ tal que $y(x_0) = 1$. E, como a função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ constante e igual a 1 é uma solução de $y' = (y^2 - 1)(y^2 - 9)$ que passa por $(x_0, 1)$, segue-se do teorema de existência e unicidade que y é constante e igual a 1 em I , contrariando o fato de ser $y(0) = 0$. Então $(\forall x \in I)y(x) < 1$; por um argumento análogo, conclui-se que $(\forall x \in I)y(x) > -1$.

(c) (1,5 pto.) *Mostre que o problema de Cauchy do item anterior admite uma única solução maximal, definida globalmente. SUGESTÃO: Para verificar que a solução maximal está definida globalmente:*

(i) *verifique que o domínio da solução maximal deve ser um intervalo aberto;* (ii) *suponha que $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ seja solução do referido problema de Cauchy; se $b \in \mathbb{R}$, verifique que existe $\lim_{x \rightarrow b^-} y(x)$ e que a referida solução pode ser prolongada propriamente além de b , e proceda de forma análoga caso $a \in \mathbb{R}$.*

O teorema de existência e unicidade nos permite concluir que existe uma única solução maximal $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ do referido problema de Cauchy, cujo domínio deve, necessariamente, ser um intervalo aberto (se I fosse um intervalo que contivesse o seu extremo direito, digamos, b , poder-se-ia aplicar o teorema de existência e unicidade para a equação $y' = (y^2 - 1)(y^2 - 9)$ com condição inicial $(b, y(b))$ para prolongar propriamente a solução y ; de forma análoga, o extremo esquerdo de I não pode pertencer a I , portanto I é aberto). Verifiquemos que tal solução é global, i.e. $I = \mathbb{R}$. Com efeito, suponha que I seja da forma (a, b) , com $b < \infty$. Pelo item anterior, $(\forall x \in I)|y(x)| < 1$, portanto $y' = (y^2 - 1)(y^2 - 9)$ é estritamente positiva em I , donde se conclui que y é estritamente crescente em I ; sendo estritamente crescente e limitada, existe $y_b \doteq \lim_{x \rightarrow b^-} y(x) = \sup\{y(x) \mid x \in I\}$, de modo que y pode ser estendida continuamente ao intervalo $(a, b]$, pondo-se $y(b) \doteq y_b$. Afirmo que a referida extensão também será solução de $y' = (y^2 - 1)(y^2 - 9)$; de fato, a extensão é contínua em b e existe $\lim_{x \rightarrow b^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} (y(x)^2 - 1)(y(x)^2 - 9) = (y_b^2 - 1)(y_b^2 - 9)$, o que nos permite aplicar a regra de l'Hôpital para concluir que existe o limite em b de $\frac{y(x) - y(b)}{x - b}$ e que tal limite vale $(y_b^2 - 1)(y_b^2 - 9)$. Como isto contraria a maximalidade da solução tomada, segue-se $b = \infty$; de forma análoga, conclui-se que $a = -\infty$.