MAT 226 - Equações Diferenciais I
P1 - 11 de Setembro de 2013
Professor: Gláucio Terra

Nome:____	Nota:
No. USP:__________________RG:__________________	
Assinatura:____________________________________	

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!

QUESTÃO **1.** *Encontre, caso exista(m), a(s) solução(ões) maximal(ais) dos problemas de Cauchy:*

(a) (2 ptos.) $y' = x^2y^2$, $y(0) = 1$.

(b) (2 ptos.) $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 1$.

QUESTÃO **2.** (2 ptos.) *Encontre as soluções maximais da equação* $(x + 3y) - xy' = 0$.

QUESTÃO **3.** (1 pto.) *Determine um fator integrante e resolva a equação* $(x^2+y^2)+(x^3+3xy^2+2xy)\frac{dy}{dx} = 0$. OBS.: As soluções podem ser dadas implicitamente.

QUESTÃO **4.** (a) (0,5 pto.) *Encontre as soluções constantes de* $y' = (y^2 - 1)(y^2 - 9)$.

(b) (1 pto.) *Mostre que, dados* $I \subset \mathbb{R}$ *intervalo não-degenerado e* $y : I \to \mathbb{R}$ *solução do problema de Cauchy* $y' = (y^2 - 1)(y^2 - 9)$, $y(0) = 0$, *então* $(\forall x \in I)|y(x)| < 1$. SUGESTÃO: *Use a unicidade.*

(c) (1,5 pto.) *Mostre que o problema de Cauchy do item anterior admite uma única solução maximal, definida globalmente.* SUGESTÃO: *Para verificar que a solução maximal está definida globalmente:* (i) *verifique que o domínio da solução maximal deve ser um intervalo aberto;* (ii) *suponha que* $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ *seja solução do referido problema de Cauchy; se* $b \in \mathbb{R}$, *verifique que existe* $\lim_{x\to b^-} y(x)$ *e que a referida solução pode ser prolongada propriamente além de* b, *e proceda de forma análoga caso* $a \in \mathbb{R}$.

A seguinte versão do teorema de existência e unicidade foi enunciada em aula:

Teorema. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathsf{E}$ aberto, $\mathsf{E} = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, e $f : \Omega \to \mathsf{E}$ de classe C^1. Dado $(t_0, x_0) \in \Omega$, considere o problema de Cauchy $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Tem-se:

(i) existe uma solução do referido problema de Cauchy, definida num intervalo aberto contendo t_0;

(ii) se $x_1 : I_1 \to \mathsf{E}$ e $x_2 : I_2 \to \mathsf{E}$ forem soluções do referido problema de Cauchy, definidas em intervalos não-degenerados I_1 e I_2, então x_1 e x_2 coincidem em $I_1 \cap I_2$.