3/ <u>Dependência</u> <u>diferenciável</u> <u>c/</u> <u>respeito</u> <u>a</u> <u>condições</u> <u>iniciais</u>

Sejam $F : \Omega \overset{ab}{\subset} E \longrightarrow E$ de classe C^1 e $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \Omega$ o fluxo de F. Provaremos que $\phi \in C^1$.
$\phi(t,\cdot)$

(i) Dados $x_0 \in \Omega$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tais que $x_0 \in \mathcal{D}_{t_0} = \operatorname{dom} \phi_{t_0}$, provemos que ϕ_{t_0} é derivável em x_0.

Tome $B = B_\delta(x_0)$ e $a < 0 < b$ tais que $t_0 \in (a,b)$ e $[a,b] \times B \subset \mathcal{D}$.

· Encontremos um candidato a $D\phi_{t_0}(x_0)$. Suponha que $D\phi_t$ exista em B, $\forall t \in [a,b]$, e que

$$\frac{d}{dt} D\phi_t = D \overbrace{\frac{d}{dt}\phi_t}^{\doteq F\circ\phi_t}$$

em B. Então, $\forall x \in B, \forall t \in [a,b]$:

$$\frac{d}{dt} D\phi_t(x) = D(F\circ\phi_t)(x) = DF(\phi_t(x)) \cdot D\phi_t(x)$$

E, como $\phi_0 = id \therefore D\phi_0 = id$, $W(t,x) \doteq D\phi_t(x) \in L(E)$ é solução do problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} \dfrac{d}{dt} W(t,x) = \overbrace{DF(\phi_t(x))}^{\doteq A_x(t)} \cdot W(t,x) \\ W(0,x) = id \end{cases}$$

· Tome, pois, dado $x \in B$, $W(\cdot, x) : [a,b] \longrightarrow L(E)$ solução de (PC).

<u>Afirmação</u>: $\forall x \in B$, $\forall t \in [a,b]$, $\phi_t|_B$ é derivável em x e $D\phi_t(x) = W(t,x)$. Em particular, para $t = t_0$ e $x = x_0$, isso prova (i).

Dado $h \in E$ t.q. $x+h \in B$, tem-se, $\forall t \in [a,b]$:

$$\phi_t(x+h) - \phi_t(x) - W(t,x)\cdot h \doteq Z(t,x)$$

satisfaz: (1) $Z(0,x) = x+h - x - h = 0$

(2) $\dfrac{d}{dt} Z(t,x) = F(\phi_t(x+h)) - F(\phi_t(x)) - DF(\phi_t(x))\cdot W(t,x)\cdot h$ (*)

Leminha: Podemos reduzir $B = B_\delta(x_0)$, se necessário, de modo a garantir que, $\forall x \in B$, $\forall h \in E / x+h \in B$, $\forall t \in [a,b]$, $[\phi_t(x), \phi_t(x+h)] \subset \Omega$.

Dem.: Para cada $t \in [a,b]$, tome $\mathcal{U}_t \subset \Omega$ vizinhança convexa de $\phi_t(x_0)$; pela continuidade de ϕ, $\exists\, \delta_t > 0$ t.q. $\phi([t-\delta_t, t+\delta_t] \cap [a,b] \times B_{\delta_t}(x_0)) \subset \mathcal{U}_t$. Tome $t_1, \dots, t_n \in [a,b]$ tais que $\{[t_i - \delta_{t_i}, t_i + \delta_{t_i}] : 1 \le i \le n\}$ cobre o compacto $[a,b]$, e $\delta := \min\{\delta_{t_i} : 1 \le i \le n\}$. Então, $\forall t \in [a,b]$, $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $t \in [t_i - \delta_{t_i}, t_i + \delta_{t_i}]$ $\therefore$ $\phi_t(B_\delta(x_0)) \subset \phi([t_i - \delta_{t_i}, t_i + \delta_{t_i}] \cap [a,b] \times B_{\delta_{t_i}}(x_0)) \subset \mathcal{U}_{t_i}$ $\therefore$ $(\forall x \in B_\delta(x_0), \forall h \in E / x+h \in B_\delta(x_0))$ $[\phi_t(x), \phi_t(x+h)] \subset \mathcal{U}_{t_i} \subset \Omega$. #

Usando o leminha, $[\phi_t(x), \phi_t(x+h)] \subset \Omega$ $\therefore$

$$F(\phi_t(x+h)) - F(\phi_t(x)) = F(\phi_t(x) + s(\phi_t(x+h) - \phi_t(x)))\Big]_{s=0}^{1} =$$

$$\overset{F \in C^1}{=} \int_0^1 \frac{d}{ds}\Big[F(\phi_t(x) + s(\phi_t(x+h) - \phi_t(x)))\Big]\, ds =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 DF(\phi_t(x) + s(\phi_t(x+h) - \phi_t(x)))\cdot[\phi_t(x+h) - \phi_t(x)]\, ds}_{(**)}$$

Portanto, de (*), segue-se:

$$(2)\quad \frac{d}{dt} Z(t,x) = (**) - DF(\phi_t(x)) \cdot W(t,x) \cdot h =$$

$$= \overbrace{DF(\phi_t(x))}^{A_x(t)} \cdot \overbrace{[\phi_t(x+h) - \phi_t(x) - W(t,x)\cdot h]}^{=Z(t,x)} +$$

$$+ \underbrace{\int_0^1 [DF(\phi_t(x) + s(\phi_t(x+h) - \phi_t(x))) - DF(\phi_t(x))] \cdot [\phi_t(x+h) - \phi_t(x)]\, ds}_{B_x(t)}$$

E, como por (1) $Z(0,x) = 0$, segue-se da fórmula de Duhamel que, $\forall x \in B$, $\forall t \in [a,b]$:

$$Z(t,x) = \int_0^t R(t,\tau)\, B_x(\tau)\, d\tau \quad (\Delta)$$

onde
- $R : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow L(E)$ é o resolvente de $\dot{Y} = A_x(t) Y$, onde $A_x : [a,b] \longrightarrow L(E)$, $t \longmapsto DF(\phi_t(x))$
- $B_x : [a,b] \longrightarrow E$ como acima

Note que A_x e B_x são contínuas, pois $F \in C^1$.

Provemos, usando (Δ), que $Z(t,x) = o(\|h\|)$; isso concluirá a demonstração da afirmação ao final da pág. 115.

Passo 1. Lema: Sejam $A:[a,b]\longrightarrow L(E)$ contínua, $t_0\in[a,b]$, $\|A(t)\|\leq K$ em $[a,b]$ e $x:[a,b]\longrightarrow E$ solução de $\begin{cases}\dot{x} = A(t)\cdot x\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$

Então $(\forall t\in[a,b])\ \|x(t)\|\leq e^{K|t-t_0|}\|x_0\|$.

Dem.: É suficiente mostrar p/ $t\geq t_0$ (p/ $\overset{-t>-t_0}{t<t_0}$, substitui-se $x(t)$ por $x(-t)$, a qual é solução de $\dot{x}=-A(-t)\cdot x$ em $[-b,-a]$). Pondo $y(t)=e^{-K(t-t_0)}x(t)$ em $[t_0,b]$, tem-se:

$$\begin{cases} y'(t) = C(t)\,y(t)\\ y(t_0) = x_0\end{cases}$$

onde $C(t) = A(t)-K\cdot id_E$, $t\in[t_0,b]$

Como $(\forall t\in[t_0,b],\ \forall w\in\mathbb{C}^n)$ $\operatorname{Re}\langle C(t)w,w\rangle =$

$$= -K\|w\|^2-\langle A(t)\cdot w,w\rangle \leq -K\|w\|^2-\underbrace{|\langle A(t)\cdot w,w\rangle|}_{\leq K\|w\|^2}\leq 0,$$

segue-se do lemito abaixo que $\|y(t)\|\leq\|y(t_0)\|$ em $[t_0,b]$, donde a tese.

Lemito: Seja $y:[a,b]\longrightarrow E$ solução de $\begin{cases}\dot{y}=C(t)\cdot y\\ y(a)=y_0\end{cases}$

Com $C:[a,b]\longrightarrow E$ contínua e $(\forall w\in\mathbb{C}^n,\ \forall t\in[a,b])\ \operatorname{Re}\langle C(t)\cdot w,w\rangle\leq 0$.

Então $(\forall t\in[a,b])\ \|y(t)\|\leq\|y(a)\|$.

Dem.: $$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = \langle \overbrace{\dot{y}(t)}^{=C(t)y(t)}, y(t)\rangle + \langle y(t),\dot{y}(t)\rangle =$$

$$= 2\operatorname{Re}\langle C(t)\cdot y(t), y(t)\rangle\leq 0 \ \therefore\ \|y\|^2 \text{ decrescente}$$

$\therefore\ \|y\|$ decrescente em $[a,b]$. #

Passo 2: Reduzindo $\delta > 0$, se necessário, podemos supor $[a,b] \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset R$; como $F \in C^1$, $DF \circ \phi$ é contínua no compacto $[a,b] \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset R$ $\therefore$ $\|DF \circ \phi\|$ é limitada aí, digamos, por $M > 0$.

Obs.: Se E fosse um esp. de Banach de dim ∞ também podemos reduzir $\delta > 0$ de modo a garantir-se $\|DF \circ \phi\|$ limitada em $[a,b] \times B_\delta(x_0)$, bastando usar a compacidade de $[a,b]$ e proceder como no argumento do leminha da pág. 116, i.e. p/ cada $t \in [a,b]$, $\exists \delta_t > 0$ t.q. $\|DF \circ \phi\|$ é limitada em $[t-\delta_t, t+\delta_t] \cap [a,b] \times B_{\delta_t}(x_0)$, etc.

Passo 3: $\forall x \in B$, $\forall h \in E / x+h \in B$, $\xi : [a,b] \longrightarrow E$
$t \longmapsto \phi_t(x+h) - \phi_t(x)$

é solução de $\begin{cases} \dot{\xi} = C(t)\xi \\ \xi(0) = h \end{cases}$

onde $C(t) = \int_0^1 DF(\phi_t(x) + s(\phi_t(x+h) - \phi_t(x)))\, ds \in L(E)$;

isso decorre de (**) ao final da pág. 116.

Como $[a,b] \times [0,1] \times \overline{B_\delta(x_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)} \xrightarrow{\eta} L(E)$
$(t, s, p, q) \longmapsto DF(\phi_t(p) + s(\phi_t(q) - \phi_t(p)))$

é contínua num compacto, podemos aumentar $M > 0$ do passo 2, se necessário, de modo a garantir, $\forall t \in [a,b]$, $\forall x \in B$, $\forall h \in E / x+h \in B$, $\|C(t)\| \leq M$.

Obs.: Num espaço de Banach E de dim ∞, $\forall (t,s) \in [a,b] \times [0,1]$ escolheríamos $\delta = \delta(t,s)$ t.q. η limitada em $[t-\delta, t+\delta] \times [s-\delta, s+\delta] \times B_\delta \times B_\delta$ e, como na obs. anterior, usamos a compacidade de $[a,b] \times [0,1]$ p/ concluir que η é limitada p/ $\delta > 0$ suf. pequeno.

Então segue-se do lema do passo 1 que, $\forall t \in [a,b]$, $\forall x \in B$, $\forall h \in E / x+h \in B$:

$$\| \phi_t(x+h) - \phi_t(x) \| = \| \xi(t) \| \leq e^{M|t|} \|h\|$$

Passo 4: $\forall t \in [a,b]$, $\forall x \in B$, $\|A_x(t)\| = \|DF(\phi_t(x))\| \leq M$; portanto, como a resolvente $R: [a,b] \times [a,b] \to L(E)$ é solução de $\begin{cases} \dot{Y} = A_x(t) Y \\ Y(t_0) = id \end{cases}$, segue-se do lema do passo 1 que $\|R(t,t_0)\| \leq e^{M|t-t_0|} \|id\| = e^{M|t-t_0|}$

Por outro lado, sendo $B_x(t)$ como na pág. 117, tem-se:

$(\forall t \in [a,b], \forall x \in B)$ $\|B_x(t)\| \leq$

$$\leq \int_0^1 \| \underbrace{DF(\phi_t(x) + s(\phi_t(x+h) - \phi_t(x))) - DF(\phi_t(x))}_{=: \Psi(s,t,x,h)} \| \cdot \|\phi_t(x+h) - \phi_t(x)\| ds \leq$$

$$\leq \sup_{s \in [0,1]} \|\Psi(s,t,x,h)\| \cdot e^{M|t|} \|h\|$$

Logo, $\forall x \in B$, $\forall h \in E \setminus \{0\}$ t.q. $x+h \in B$, $\forall t \in [a,b]$:

$$\frac{\|Z(t,x)\|}{\|h\|} \overset{\text{por (1), pág. 117}}{\leq} \left| \int_0^t \|R(t,\tau)\| \, \|B_x(\tau)\| \, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^t e^{M|t-\tau|} \cdot \sup_{s \in [0,1]} \|\Psi(s,\tau,x,h)\| \, e^{M|t|} \frac{\cancel{\|h\|}}{\cancel{\|h\|}} \, d\tau \right| \leq$$

$$\leq e^{2M|t|} \cdot |t| \cdot \sup_{\tau \in [a,b]} \sup_{s \in [0,1]} \|\Psi(s,\tau,x,h)\|$$

usando a cont. de ϕ_t, DF e compacidade

Como $\|\Psi(s,t,x,h)\| \xrightarrow{h \to 0} 0$ unif. em $(s,\tau) \in [0,1] \times [a,b]$, conclui-se que $\lim_{h \to 0} \frac{\|Z(t,x)\|}{\|h\|} = 0$ $\therefore$

$\therefore$ $\forall t \in [a,b]$, $\forall x \in B$, ϕ_t é derivável em x e

$D\phi_t(x) = W(t,x) \in L(E)$

onde $W(\cdot, x) : [a,b] \longrightarrow L(E)$ solução de (PC) na pág. 115.

Portanto, está demonstrada a parte (i) c, como

<u>Corolário da demonstração</u>: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{D}_t = \text{dom}\, \phi_t$, ϕ_t é derivável em x e

$$\frac{d}{dt}\left[D\phi_t(x)\right] = D\left(\frac{d}{dt}\phi_t\right)(x) = D(F \circ \phi_t)(x) =$$
$$= DF(\phi_t(x)) \cdot D\phi_t(x) \in L(E)$$

i.e. $t \mapsto D\phi_t(x) \in L(E)$ é solução de $\dot{Y} = DF(\phi_t(x)) \cdot Y$

Por esta razão, $\begin{array}{l} \mathcal{D} \longrightarrow L(E) \\ (t,x) \longmapsto D\phi_t(x) \end{array}$ é chamada de <u>fluxo variacional</u> de F.

(ii) $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow R \subset E$ é de classe C^1.

Com efeito:

(1) $\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) = F \circ \phi(t,x)$, i.e. $\frac{\partial \phi}{\partial t} = F \circ \phi$ é contínua.

(2) $\frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x) = W(t,x) \in L(E)$, $\forall (t,x) \in [a,b]\times B$,

onde $B = B_\delta(x_0)$, $a<0<b$ t.q. $t\in[a,b]$ e $[a,b]\times B \subset \mathcal{D}$

$W(\cdot,x) : [a,b] \longrightarrow L(E)$ solução de

$$\begin{cases} \dot{Y} = \underbrace{DF(\phi_t(x))}_{=A_x(t)=A(t,x)} \cdot Y \quad (*) \\ Y(0) = id \end{cases}$$

Portanto, $\frac{\partial\phi}{\partial x} = W$ em $[a,b]\times B$; a continuidade de $\partial\phi/\partial x$ resultará se provarmos que $W : [a,b]\times B \longrightarrow L(E)$ é contínua!

<u>Passo 1'</u>: W é Lipschitz na 1ª variável, uniformemente em B.

<u>Dem.</u>: Pelo <u>Passo 2</u> na pág. 119, podemos supor $\|DF\circ\phi\|$ limitada por $M>0$ em $[a,b]\times B$. Como, $\forall x\in B, \forall t\in[a,b]$,

$$\frac{d}{dt}W(t,x) = DF(\phi_t(x)).W(t,x)$$

segue-se do lema do passo 1 que $\forall x\in B$, $\forall t\in[a,b]$,

$$\|W(t,x)\| \leq e^{M|t|}\|\underbrace{W(0,x)}_{=id}\| = e^{M|t|}$$

donde, $\forall x\in B$, $\forall t\in[a,b]$,

$$\left\|\frac{d}{dt}W(t,x)\right\| \leq \|DF(\phi_t(x))\|\,\|W(t,x)\| \leq M e^{M|t|} \leq$$

$$\leq M e^{M(b-a)}$$

$\therefore W(\cdot,x) : [a,b] \longrightarrow L(E)$ admite cte. de Lipschitz $Me^{M(b-a)}$, $\forall x\in B$.

Passo 2': W é contínua na 2ª variável

Dem.: $\forall x \in B$, $\forall h \in E / x+h \in B$, $\forall t \in [a,b]$:

$$\frac{d}{dt}\Big[\overbrace{W(t,x+h) - W(t,x)}^{\doteq\, \eta(t)}\Big] = \overbrace{DF(\phi_t(x+h))}^{\doteq\, A(t)} \cdot \eta(t) + \overbrace{\big[DF(\phi_t(x+h)) - DF(\phi_t(x))\big] \cdot W(t,x)}^{\doteq\, B(t)}$$

$\therefore L_A : [a,b] \longrightarrow L(L(E))$ cont.

Como $\begin{cases} A : [a,b] \xrightarrow{\text{cont.}} L(E) \ \text{e}\ B : [a,b] \xrightarrow{\text{cont.}} L(E) \\ \eta(0) = h \end{cases}$

segue-se da fórmula de Duhamel que

$$\eta(t) = R(t,0)\,\overbrace{\eta(0)}^{= id - id = 0} + \int_0^t R(t,\tau)\, B(\tau)\, d\tau \quad (A)$$

onde $R : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow L(L(E))$ é a resolvente de $\dot{Y} = L_{A(t)} Y$, i.e. $R(\cdot,\tau)$ é a solução de

$$\begin{cases} \dot{Y} = L_{A(t)} Y \\ Y(\tau) = id_{L(L(E))} \end{cases}.$$

Como $(\forall t \in [a,b], \forall x \in B, \forall h \in E / x+h \in B)$ $\|L_{A(t)}\| = \|A(t)\| = \|DF(\phi_t(x+h))\| \leq M$, segue-se do lema do passo 1, pág. 118, que:
↳ passo 2, pág. 119

$\forall (t,\tau) \in [a,b]\times[a,b]$, $\forall x \in B$, $\forall h \in E / x+h \in B$:

$$\|R(t,\tau)\| \leq e^{M|t-\tau|}\, \|\underbrace{R(\tau,\tau)}_{= id}\| = e^{M|t-\tau|} \leq e^{M(b-a)}$$

E, pelo que se demonstrou no passo 1', $\forall x \in B$, $\forall t \in [a,b]$, $\|W(t,x)\| \leq e^{M|t|} \leq e^{M(b-a)}$.

Portanto, de (B) se conclui que, $\forall x \in B$, $\forall h \in E /$ $x+h \in B$, $\forall t \in [a,b]$:

$$\|W(t,x+h) - W(t,x)\| = \|\eta(t)\| \leq \left| \int_0^t \|R(t,\tau)\| \, \|B(\tau)\| d\tau \right|$$

$$\leq \left| \int_0^t \underbrace{\|R(t,\tau)\|}_{\leq e^{M(b-a)}} \, \|DF(\phi_\tau(x+h)) - DF(\phi_\tau(x))\| \, \underbrace{\|W(\tau,x)\|}_{\leq e^{M(b-a)}} d\tau \right| \leq$$

$$\leq (b-a) \cdot e^{2M(b-a)} \sup_{\tau \in [a,b]} \|DF(\phi_\tau(x+h)) - DF(\phi_\tau(x))\|$$

Como $\|DF(\phi_\tau(x+h)) - DF(\phi_\tau(x))\| \xrightarrow{h\to 0} 0$ uniformemente em $\tau \in [a,b]$ (pela continuidade de $DF \circ \phi$ em $[a,b] \times B$ e pela compacidade de $[a,b]$), conclui-se que $\lim_{h \to 0} \|W(t,x+h) - W(t,x)\| = 0$ $\therefore$ $W(t,\cdot)$ é contínua em $x \in B$, $\forall x \in B$ $\therefore$ $W(t,\cdot)$ é contínua em B. #

Passo 3': Dado $(t_0,x_0) \in [a,b] \times B$, provemos que W é contínua em (t_0,x_0). Com efeito, $\forall (t,x) \in [a,b] \times B$:

$$W(t,x) - W(t_0,x_0) = W(t,x) - W(t_0,x) + $$
$$+ W(t_0,x) - W(t_0,x_0)$$

$$\therefore \|W(t,x) - W(t_0,x_0)\| \leq \overbrace{\|W(t,x) - W(t_0,x)\|}^{\leq M e^{M(b-a)} |t-t_0| \text{ (passo 2')}} +$$
$$+ \|W(t_0,x) - W(t_0,x_0)\|$$

e, como $W(t_0,\cdot)$ é contínua, segue-se a tese. #

(iii) Se $F \in C^k$, então $\phi \in C^k$.

Dem.: Por indução sobre k. Já provamos para $k=1$; suponha, como hipótese de indução, que vale para toda equação autônoma induzida por um campo de classe C^{k-1}.

Tomando $W : [a,b] \times B \longrightarrow L(E)$ como anteriormente, i.e. $B = B_\delta(x_0)$, $a < 0 < b$ / $[a,b] \times B \subset \mathcal{D}$ e $\forall x \in B$ $W(\cdot, x) : [a,b] \longrightarrow L(E)$ sol. de $\begin{cases} \dot{Y} = DF(\phi_t(x)) \cdot Y, \\ Y(0) = id \end{cases}$

então ($\forall x \in B$) $(\phi(\cdot, x), W(\cdot, x)) : [a,b] \longrightarrow R \times L(E)$ é solução da equação autônoma c/ 2.º M C^{k-1} dado por

$$\begin{cases} \dot{y} = F(y) \\ \dot{Y} = DF(y) \cdot Y \end{cases}$$

com cond. inicial $(0, (x, id_E))$.

Então segue-se da hipótese de indução que ϕ e W são de classe C^{k-1} em $(a,b) \times B$,

$\therefore \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = W \text{ é de classe } C^{k-1} \text{ em } (a,b) \times B \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = F \circ \phi \text{ é de classe } C^{k-1} \text{ em } (a,b) \times B \end{cases}$

$\therefore \phi \in C^k$ em $(a,b) \times B$.