

MAT220- Cálculo Diferencial e Integral IV - 2010 - IF

Notas de Aula: 31/08

1-) Principais definições e teoremas vistos em aula:

TEOREMA 1 (ABEL) *Seja $\sum a_n x^n$ uma série de potências com intervalo de convergência $(-R, R)$. Se a série for convergente no extremo direito do intervalo de convergência, então a convergência é uniforme no intervalo $[0, R]$. Analogamente, se a série for convergente no extremo esquerdo do intervalo de convergência, então a convergência é uniforme no intervalo $[-R, 0]$.*

TEOREMA 2 (INTEGRAÇÃO TERMO A TERMO PARA SÉRIES DE POTÊNCIAS) *Sejam $\sum a_n x^n$ uma série de potências e $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ um intervalo no qual a série convirja simplesmente. Então a soma da série é Riemann-integrável no referido intervalo e a série pode ser integrada termo a termo, ou seja, vale:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx.$$

TEOREMA 3 (DERIVAÇÃO TERMO A TERMO PARA SÉRIES DE POTÊNCIAS) *Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$ e $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ a soma da referida série. Então f é derivável, a série das derivadas $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ também tem raio de convergência R e a sua soma é a derivada de f . Ou seja, para todo $x \in (-R, R)$, tem-se:*

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n x^n.$$

COROLÁRIO 3.1 *Com a mesma notação do teorema acima, f é de classe C^{∞} e, para todo $x \in (-R, R)$ e todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k},$$

sendo R o raio de convergência da série de potências do segundo membro da igualdade acima. Em particular, para $x = 0$ obtém-se $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Portanto, a série $\sum a_n x^n$ é a série de Taylor de f , centrada em 0, conforme a definição abaixo.

DEFINIÇÃO 1 (SÉRIE DE TAYLOR) *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ aberto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{∞} e $x_0 \in A$. A série de Taylor de f em x_0 é a série de potências centrada em x_0 cuja sequência das reduzidas tem por termo geral o polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 , ou seja, é a série:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

DEFINIÇÃO 2 (FUNÇÕES ANALÍTICAS REAIS) *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que f é analítica se, para todo $x_0 \in A$, existir $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$ e existir uma série de potências centrada em x_0 , com raio de convergência maior ou igual a r e com soma f em $(x_0 - r, x_0 + r)$ (OBS.: note que, caso uma tal série exista, necessariamente deve ser a série de Taylor de f em x_0 , conforme o corolário 3.1).*

TEOREMA 4 (PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES ANALÍTICAS REAIS) *1. Somas, diferenças, produtos e quocientes de funções analíticas são funções analíticas.*

2. A composta de duas funções analíticas é uma função analítica.

3. Se uma função inversível for analítica, sua inversa é analítica.

4. A soma de uma série de potências é uma função analítica (definida no intervalo de convergência da série).

TEOREMA 5 (FÓRMULA DE TAYLOR DE ORDEM n COM RESTO DE LAGRANGE) *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $n \in \mathbb{N}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n tal que $f^{(n)}$ seja derivável no interior de I . Então, dados $x_0 \in I$ e $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que $x_0 + h \in I$, existe $c \in \mathbb{R}$ entre x_0 e $x_0 + h$ (i.e. $x_0 < c < x_0 + h$ ou $x_0 + h < c < x_0$) tal que:*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

2-) Estude as seções 6.16 e 6.17 do Kaplan.

3-) Exercício: mostre que $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções analíticas (SUGESTÃO: use a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para mostrar que são a soma das respectivas séries de Taylor centradas no zero).