MAT220- Cálculo Diferencial e Integral IV - 2010 - IF

Notas de Aula: 26/08

1-) Principais definições e teoremas vistos em aula:

Teorema 1 (derivação termo a termo) *Sejam $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções deriváveis $[a,b] \to \mathbb{R}$. Suponha que exista $c \in [a,b]$ tal que a sequência de números reais $\{f_n(c)\}_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente e que a seguência das derivadas $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ seja uniformemente convergente para $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente para uma primitiva de g, de modo que, para todo $x \in [a,b]$:*

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Definição 1 *Uma* série de potências *é uma série de funções $\sum f_n$, onde $(\forall n) f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é da forma $x \mapsto a_n(x-x_0)^n$, dados $x_0 \in \mathbb{R}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathbb{R}$. Diz-se que uma tal série é* centrada em x_0.

Teorema 2 (e definição de *raio* e *intervalo* de convergência de uma série de potências) *Seja $\sum a_n(x-x_0)^n$ uma série de potências centrada em $x_0 \in \mathbb{R}$. Então existe $R \in [0,+\infty]$ tal que a série converge absolutamemente para todo x no intervalo (x_0-R, x_0+R), e diverge para $x \notin [x_0-R, x_0+R]$. Tal R chama-se* raio de convergência *da série de potências $\sum a_n(x-x_0)^n$ e o intervalo (x_0-R, x_0+R) chama-se* intervalo de convergência *da referida série. Nos extremos do intervao de convergência a série pode ser convergente ou divergente. Além disso, a convergência é uniforme em todo subintervalo compacto de (x_0-R, x_0+R) e o raio de convergência é dado pela fórmula:*

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Observação. Com a mesma notação do teorema acima, em geral não ocorre a convergência uniforme em (x_0-R, x_0+R).

Teorema 3 *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais estritamente positivos. Então:*

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Em particular, se existir $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *, então também existe* $\lim \sqrt[n]{a_n}$ *e os limites coincidem.*

2-) Algumas referências complementares:

- Elon Lages Lima, *Curso de Análise, vol. 1*, IMPA. (vide capítulo 5 para a demonstração do teorema 3 e o capítulo 10 para mais detalhes sobre convergência uniforme de sequências e séries de funções).
- Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGrawHill. (vide capítulo 7 para mais detalhes sobre convergência uniforme de sequências e séries de funções).

3-) Estude a seção 6.15 do Kaplan.

4-) Encontre o raio de convergência das seguintes séries de potências. Estude a convergência das séries nos extremos dos respectivos intervalos de convergência.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}\, x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!}\, x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n}\, x^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{[2+(-1)^n]^n}\, x^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{a^n+b^n}$, dados $b > a > 0$.

Respostas: (a) 4. Não converge nos dois extremos. (b) 0. (c) 1. Não converge nos dois extremos. (d) 4/3. Converge no extremo esquerdo e não no direito. (e) 1. Não converge nos dois extremos. (f) 1. Converge nos dois extremos. (g) b. Não converge nos dois extremos.