# MAT220- Cálculo Diferencial e Integral IV - 2010 - IF

Notas de Aula: 19/08

**1-)** Principais teoremas e definições vistos em aula:

DEFINIÇÃO 1 (PONTO DE ACUMULAÇÃO E LIMITE DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO DE ACUMULAÇÃO) *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que $a$ é* ponto de acumulação *de $X$ se toda vizinhança de $a$ contiver infinitos pontos de $X$. Ou, equivalentemente, se para todo $\epsilon > 0$, existir $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \epsilon$.*

*Dados $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ponto de acumulação de $X$ e $f : X \to \mathbb{R}$, diz-se que $f$ tem limite no ponto $a$ se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x - a| < \delta$ e $x \in X$, tem-se $|f(x) - L| < \epsilon$. Em caso afirmativo, diz-se que $L$ é o limite de $f$ em $a$.*

TEOREMA 1 (LIMITE TERMO A TERMO) *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a$ ponto de acumulação de $X$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções uniformemente em $X$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ tem limite em $a$. Então existem e são iguais os limites $\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$. O mesmo vale se $X$ for ilimitado superiormente (respectivamente, inferiormente) e substituirmos "$a$" por $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$).*

COROLÁRIO 1.1 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a$ ponto de acumulação de $X$ e $\sum f_n$ uma série de funções uniformemente em $X$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ tem limite em $a$. Então existem e são iguais os limites $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$. O mesmo vale se $X$ for ilimitado superiormente (respectivamente, inferiormente) e substituirmos "$a$" por $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$).*

COROLÁRIO 1.2 *Se uma sequência de funções contínuas $X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente em $X$, o limite é uma função contínua $X \to \mathbb{R}$. Idem para uma série de funções uniformemente convergente em $X$.*

TEOREMA 2 (INTEGRAÇÃO TERMO A TERMO) *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Riemann-integráveis $[a, b] \to \mathbb{R}$, uniformemente convergente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então $f$ é Riemann-integrável e $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$. Ou seja:*

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

COROLÁRIO 2.1 *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $\sum f_n$ uma série de funções Riemann-integráveis $[a, b] \to \mathbb{R}$, uniformemente convergente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então $f$ é Riemann-integrável e $\int_a^b f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$. Ou seja:*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$$

**2-)** Estude a seção 6.14 do Kaplan.