MAT220- Cálculo Diferencial e Integral IV - 2010 - IF

Exercícios e Notas de Aula: 18/11

1-) Exercícios do Kaplan, seção 9.29: 2, 3 e 4.

2-) Mostre que:

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,.$$

Estas integrais, conhecidas como *integrais de Fresnel*, são importantes no estudo de fenômenos de difração.

Sugestão: Siga o seguinte roteiro:

(a) Integre a função $\exp(iz^2)$ no bordo do setor circular $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, com a orientação positiva. Conclua, pelo teorema da integral de Cauchy, que:

$$\int_0^R \cos(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-r^2}\mathrm{d}r - \operatorname{Re}\int_{C_R} e^{iz^2}\mathrm{d}z$$

$$\int_0^R \operatorname{sen}(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-r^2}\mathrm{d}r - \operatorname{Im}\int_{C_R} e^{iz^2}\mathrm{d}z$$

onde C_R é o arco $z = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$.

(b) Mostre que:

$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \operatorname{sen}\phi}\mathrm{d}\phi$$

e use a estimativa vista em aula para a última integral; conclua que as integrais ao longo de C_R no item anterior tendem a 0 quando $R \to \infty$.

(c) Conforme você deve ter calculado no curso de Cálculo III (se não calculou, calcule!):

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$