MAT220- Cálculo Diferencial e Integral IV - 2010 - IF

Notas de Aula: 17/08

1-) Critério de Cauchy para convergência uniforme de sequências:

DEFINIÇÃO 1 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$ *e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções* $X \to \mathbb{R}$. *Diz-se que* $(f_n)_n$ *é* de Cauchy uniformemente *em* X *se, para todo* $\epsilon > 0$, *existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, para todos* $n, m \geqslant n_0$ *e para todo* $x \in X$, *tem-se* $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$.

TEOREMA 1 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$ *e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções* $X \to \mathbb{R}$. *São equivalentes:*

1. $(f_n)_n$ *é uniformemente convergente em* X.
2. $(f_n)_n$ *é uniformemente Cauchy em* X.

COROLÁRIO 1.1 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$ *e* $\sum f_n$ *uma série de de funções* $X \to \mathbb{R}$ *absoluta e uniformemente convergente (i.e. tal que a série* $\sum |f_n|$ *seja uniformemente convergente em* X*). Então* $\sum f_n$ *é uniformemente convergente.*

PROVA: Deixada como exercício.

COROLÁRIO 1.2 (TESTE DE WEIERSTRASS) *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$ *e* $\sum f_n$ *uma série de de funções* $X \to \mathbb{R}$. *Suponha que exista uma série convergente* $\sum a_n$ *de números reais positivos tal que,* $(\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N})|f_n(x)| \leqslant a_n$. *Então* $\sum f_n$ *converge absoluta e uniformemente em* X.

PROVA: Deixada como exercício.

2-) Estude as seções 6.11, 6,12 e 6.13 do Kaplan.

3-) Exercícios do Kaplan, seção 6.13: todos.