

MAT220- Cálculo Diferencial e Integral IV - 2010 - IF

Notas de Aula: 12/08

1-) Uma caracterização dos limites superior e inferior de uma sequência:

TEOREMA 1 *Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e c um número real. Tem-se:*

1. $\limsup x_n = c$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$: (i) existem infinitos índices $n \in \mathbb{N}$ tais que $c - \epsilon < x_n$ e (ii) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, tem-se $x_n < c + \epsilon$.
2. $\liminf x_n = c$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$: (i) existem infinitos índices $n \in \mathbb{N}$ tais que $x_n < c + \epsilon$ e (ii) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, tem-se $x_n > c - \epsilon$.

2-) Critérios da razão e da raiz generalizados:

TEOREMA 2 (CRITÉRIO DA RAZÃO) *Seja $\sum a_n$ uma série de números reais estritamente positivos. Tem-se:*

1. se $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, então $\sum a_n$ é convergente.
2. se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ para $n \geq n_0$, então $\sum a_n$ é divergente.

PROVA:

1. Seja $c = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Como $c < 1$, existe $\epsilon > 0$ tal que $c + \epsilon < 1$. Pondo $p \doteq c + \epsilon$, pelo teorema 1, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq N$, tem-se $\frac{a_{n+1}}{a_n} < p$. Assim, $a_{N+1} < pa_N$, $a_{N+2} < pa_{N+1} < p^2 a_N$, $a_{N+3} < p^3 a_N$, etc., e por indução conclui-se que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{N+k} < a_N p^k$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} a_N p^k < \infty$ (série geométrica com razão $p < 1$), segue-se do critério de comparação que a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$ é convergente.
2. A hipótese implica, fazendo-se um argumento por indução, que $(\forall n > n_0) a_n > 1$, portanto $a_n \not\rightarrow 0$, donde $\sum a_n$ é divergente (pelo critério do termo geral). $\square$

TEOREMA 3 (CRITÉRIO DA RAZ) *Seja $\sum a_n$ uma série de números reais positivos. Tem-se:*

1. se $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, então $\sum a_n$ é convergente.
2. se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ para infinitos índices $n \in \mathbb{N}$, então $\sum a_n$ é divergente.

PROVA:

1. Seja $c = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Como $c < 1$, existe $\epsilon > 0$ tal que $c + \epsilon < 1$. Pondo $p \doteq c + \epsilon$, pelo teorema 1, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq N$, tem-se $\sqrt[n]{a_n} < p$, donde $a_n < p^n$. Como $\sum_{n=N}^{\infty} p^n < \infty$ (série geométrica com razão $p < 1$), segue-se do critério de comparação que a série $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ é convergente.

2. A hipótese implica que existe uma subsequência $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, donde $a_{n_k} \geq 1$. Portanto, $a_{n_k} \not\rightarrow 0$, donde $a_n \not\rightarrow 0$, donde $\sum a_n$ é divergente (pelo critério do termo geral). $\square$

3-) TEOREMA 4 (CRITÉRIO DE DIRICHLET) *Sejam $\sum a_n$ uma série de números reais limitada (i.e. tal que a sua sequência das reduzidas é limitada) e $\sum b_n$ uma série de números positivos tal que a sequência $(b_n)_n$ é decrescente e convergente para 0. Então a série $\sum a_n b_n$ é convergente.*

PROVA:(indicação) Seja $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência das reduzidas de $\sum a_n$. Por indução sobre n , verifica-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n$. Verifique que a série cuja sequência das reduzidas é dada pela primeira parcela do segundo membro da última igualdade é absolutamente convergente e que $s_n b_n \rightarrow 0$. $\square$

COROLÁRIO 4.1 (CRITÉRIO DE LEIBNITZ PARA SÉRIES ALTERNADAS) *Seja $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos, decrescente e convergente para 0. Então a série $\sum (-1)^n b_n$ é convergente.*

PROVA: Aplique o critério de Dirichlet para $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $a_n = (-1)^n$ e $(b_n)_n$. $\square$

4-) Estude a seção 6.8 do Kaplan.

5-) Exercícios do Kaplan, seção 6.7: 6, 7, 8 e 12.