

MAT220- Cálculo Diferencial e Integral IV - 2010 - IF

Notas de Aula: 05/08

1-) Principais definições e teoremas vistos na aula de hoje:

TEOREMA 1 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

DEFINIÇÃO 1 (VALOR DE ADERÊNCIA, LIMITE SUPERIOR E LIMITE INFERIOR) *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Diz-se que um número real c é um valor de aderência da referida sequência se for o limite de alguma subsequência da mesma. Diz-se que c é o limite superior de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (NOTAÇÃO: $c = \limsup x_n$ OU $c = \overline{\lim} x_n$) se for o maior valor de aderência desta sequência, i.e. se for um valor de aderência e se qualquer outro valor de aderência for menor ou igual a c . Analogamente, diz-se que c é o limite inferior de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (NOTAÇÃO: $c = \liminf x_n$ OU $c = \underline{\lim} x_n$) se for o menor valor de aderência desta sequência.*

TEOREMA 2 *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Então existem os limites superior e inferior de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

OBSERVAÇÃO. Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for ilimitada superiormente, define-se $\limsup x_n = +\infty$; se for ilimitada inferiormente, define-se $\liminf x_n = -\infty$.

TEOREMA 3 *Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente se, e somente se, $\liminf x_n = \limsup x_n$. Se $x_n \rightarrow a$, toda subsequência de $(x_n)_n$ converge para a .*

DEFINIÇÃO 2 (SEQUÊNCIA DE CAUCHY) *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Diz-se que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, n \geq n_0$, tem-se $|x_n - x_m| < \epsilon$.*

TEOREMA 4 *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $(x_n)_n$ é convergente.
2. $(x_n)_n$ é de Cauchy.

2-) Algumas referências complementares:

- Elon Lages Lima, *Curso de Análise, vol. 1*, IMPA. (para quem quiser mais detalhes sobre limites superior e inferior de uma sequência e demonstração do teorema 2).
- Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGrawHill. (idem; também para quem quiser fazer uma introdução aos espaços métricos).

3-) Estude a seção 6.3 do Kaplan.

4-) Exercícios do Kaplan, seção 6.4: 1, 2, 3, 4 e 6.

5-) Estude a convergência da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $x_1 = \sqrt{2}$ e $(\forall n \in \mathbb{N}) x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$.