

QUESTÃO 1. (6 pts.) Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.

- (a) Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica no aberto $U \subset \mathbb{C}$, $\bar{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in U\}$ e $F : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Então F é analítica.
- (b) Seja f uma função inteira. Suponha que existam $n \in \mathbb{N}$, $M > 0$ e $R > 0$ tais que, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > R$, tem-se $|f(z)| \leq M|z|^n$. Então f é um polinômio com grau menor ou igual a n .
- (c) Seja f uma função analítica em todo o plano complexo, exceto em um número finito de singularidades $z_1, \dots, z_k$, as quais são todas pólos. Suponha que ∞ também seja pólo de f . Então f é uma função racional.

(a) Verdadeira :

Seja $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$. Então $(\forall z \in \bar{U}) F(z) = \overline{u(\bar{z}) + i v(\bar{z})} = u(\bar{z}) - i v(\bar{z})$. Portanto, denotando

por $C : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a conjugação, tem-se :

$$z \mapsto \bar{z}$$

$$\operatorname{Re} F = u \circ C \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} F = -v \circ C$$

Como u e v são de classe C^1 (por hipótese) e a composta de aplicações de classe C^1 é uma aplicação de classe C^1 , conclui-se que $\operatorname{Re} F, \operatorname{Im} F : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^1 . Resta, pois, verificar que satisfazem as condições de Cauchy - Riemann; pela regra da cadeia, tem-se :

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{Re} F)_x &= u_x \circ C, & (\operatorname{Re} F)_y &= -u_y \circ C \\ (\operatorname{Im} F)_x &= -v_x \circ C, & (\operatorname{Im} F)_y &= v_y \circ C \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Como $\begin{cases} u_y = v_x \\ u_x = v_y \end{cases}$, por hipótese, segue-se de

Cl que $\begin{cases} (\operatorname{Re} F)_x = (\operatorname{Im} F)_y \\ (\operatorname{Re} F)_y = -(\operatorname{Im} F)_x \end{cases} \quad \neq$

(b) Verdadeira:

(2)

$\forall r > R, \forall m \in \mathbb{N}$, pela fórmula integral de Cauchy,
tem-se:

$$\frac{f^{(m)}(0)}{m!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz \leq M \cdot |z|^n = M \cdot r^n$$

$$\text{donde } |f^{(m)}(0)| \leq \frac{m!}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r^{m+1}} |dz| \leq$$

$$\leq \frac{m!}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot r^n}{r^{m+1}} \cdot 2\pi r = \frac{m! M}{r^{m-n}}$$

$$\text{Se } m > n, \text{ tem-se } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m! M}{r^{m-n}} = 0 \quad \therefore f^{(m)}(0) = 0,$$

$$\text{donde } (\forall z \in \mathbb{C}) \quad f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} z^m = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(0)}{m!} z^m,$$

i.e. f é um polinômio de grau $\leq n$. $\neq$

(c) Verdadeira:

A resolução foi feita na última aula do curso.

(3)

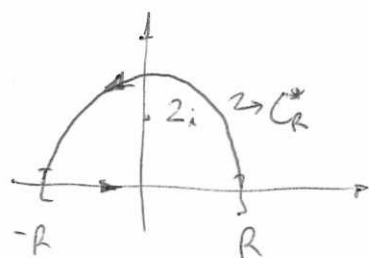
QUESTÃO 2. (2 ptos.) Calcule:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx$$

Seja $f: \mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\} \rightarrow \mathbb{C}$. $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\cos x}{x^2 + 4} = \operatorname{Re} f(x)$.

$$z \mapsto \frac{e^{iz}}{z^2 + 4}$$

Tomando $R > 2$, $C_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$ e



D_R a região do plano limitada por C_R^* e C_R e $[-R, R]$, tem-se, pelo teorema dos resíduos:

$$\int_{\partial D_R} f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i)$$

$$\int_{C_R} f + \int_{C_R^*} f \quad \therefore \quad \int_{C_R} f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i) - \int_{C_R^*} f$$

Como $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 + 4} = 0$, segue-se de uma prop. vista

em aula que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 4} dz = 0 \quad \therefore \quad \exists \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i)$

Logo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx = \operatorname{Re}(2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i))$.

Como $2i$ é pólo simples de f , tem-se:

(4)

$$\text{Res}(f, 2i) = \left. \frac{e^{iz}}{2z} \right|_{z=2i} = \frac{e^{-2}}{4i}$$

$$\therefore \text{Re}(2\pi i \text{Res}(f, 2i)) = \text{Re}\left(2\pi i \cdot \frac{e^{-2}}{4i}\right) = \boxed{\frac{\pi e^{-2}}{2}}$$

QUESTÃO 3. (2 pts.) Calcule:

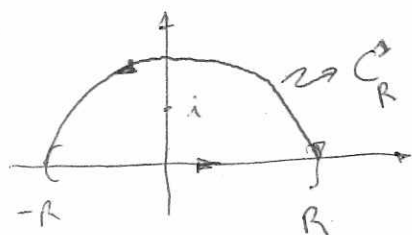
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

Como o integrando é par, tem-se

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

Seja $f: \mathbb{C} \setminus \{ \pm i \} \rightarrow \mathbb{C}$ Tomando-se $R > 1$,
 $z \mapsto \frac{1}{(z^2+1)^2}$

$C_R(\theta) = R e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e D_R a região do plano delimitada por C_R^* e $[-R, R]$, tem-se, pelo



teorema dos resíduos:

$$\int_{\partial D_R} f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

"

$$\int_{C_R} f + \int_{-R}^R f$$

$$\therefore \int_{-R}^R f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) - \int_{C_R} f$$

Como $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{(z^2+1)^2} = 0$, segue-se

uma proposição vista em aula que:

(6)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

$$\therefore \int \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

$$\begin{aligned} \text{donde } \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f = \\ &= \pi i \operatorname{Res}(f, i) \end{aligned}$$

Como i é pólo de ordem 2 de f , temos:

$$\operatorname{Res}(f, i) = g'(i), \text{ onde } g(z) = (z-i)^2 f(z) =$$

$$= \frac{1}{(z+i)^2} \quad \therefore g'(z) = -\frac{2}{(z+i)^3} \quad \therefore g'(i) = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{i}{4},$$

$$\text{donde } \pi i \operatorname{Res}(f, i) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$