

QUESTÃO 1. (6 ptos.) Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.

- (a) Sejam f e g funções analíticas num aberto conexo U tais que $f \cdot g \equiv 0$. Então $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$.
- (b) Seja f uma função inteira tal que $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$ (i.e. $\forall M > 0, \exists R > 0$ tal que $|f(z)| > M$ sempre que $|z| > R$). Então existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(a) = 0$.
- (c) Sejam $R > 0$, $a \in \mathbb{C}$, $f, g : B_R(a) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ analíticas. Então, se $f - g$ se estender a uma função analítica em $B_R(a)$, as partes principais das séries de Laurent de f e g em a coincidem (i.e. os coeficientes das potências negativas de $(z - a)$ de ambas as séries são iguais).

(a) Verdadeira :

Suponha que $f \neq 0$. Então $\exists a \in U / f(a) \neq 0$.
Como f é contínua, $\exists r > 0 / B_r(a) \subset U$ e f não se anula em $B_r(a)$ $\therefore g|_{B_r(a)} \equiv 0$. Como $B_r(a)$ é aberto, segue-se do princípio do prolongamento analítico que g se anula identicamente no aberto conexo U . $\#$

(b) Verdadeira :

Suponha que f não se anule. Então $\frac{1}{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é inteira; afirma-se que é limitada. Com efeito:
1) $\exists R > 0 / |\frac{1}{f(z)}| < 1$ se $|z| > R$ (pois $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z)} = 0$).

2) No compacto $\overline{B_R(0)}$, o teorema de Weierstrass garante que a função contínua $|\frac{1}{f}|$ assume máximos $\therefore$ é limitada, digamos, por $M > 0$.

De (1) e (2) segue-se que $|\frac{1}{f}|$ é limitada (2)
por $\max\{L, M\}$, o que prova a afirmação.

Ora, sendo $\frac{1}{f}$ inteira e limitada, deve ser constante, pelo teorema de Liouville. Então só pode ser identicamente nula, pois $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z)} = 0$; chegamos, portanto, a uma contradição. $\neq$

(c) Verdadeira:

Sejam $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ e $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n$, respectivamente, as séries de Laurent de f e g em $B_R(a) \setminus \{a\}$. Então, $\forall z \in B_R(a) \setminus \{a\}$:

$$f(z) - g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - b_n)(z-a)^n$$

e, pela unicidade da série de Laurent, o segundo membro da igualdade acima deve ser a série de Laurent de $f-g$. Como $f-g$ se estende a uma função analítica em $B_R(a)$, a série de Taylor em a desta função deve ser a série de Laurent de $f-g$ em $B_R(a) \setminus \{a\}$. Portanto, $(\forall n < 0) a_n - b_n = 0$. $\neq$

QUESTÃO 2. (2 ptos.) Calcule:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$$

Seja $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$

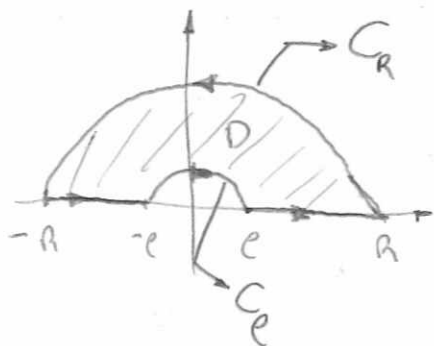
$$z \mapsto \frac{e^{i \cdot 2z}}{z}$$

Então $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad \frac{\sin 2x}{x} = \operatorname{Im} f(x)$, e mais

que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{-R}^R f(z) dz$, caso o limite

exista.

Dados $R > \rho > 0$, considere a região indicada na figura abaixo, cujo bordo ∂D é a união:



$$\partial D = [-R, -\rho] \cup C_\rho \cup [\rho, R] \cup C_R,$$

onde C_ρ e C_R são os semi-círculos de raios ρ e R , respectivamente, centrados em 0 e no semi-plano $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Pelo teorema da integral de Cauchy, tem-se:

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0, \text{ donde:}$$

$$\int_{-R}^{-\ell} f(z) dz + \int_{\ell}^R f(z) dz = - \int_{C_{\ell}} f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz \quad (*)$$

Como $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$, segue-se de uma proposição

demonstrada em aula que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i \cdot 2z}}{z} dz = 0$.

Logo, conclui-se que, $\forall \epsilon > 0$, existem os limites para $R \rightarrow \infty$ dos dois membros em (*), e são iguais, de modo que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^{-\ell} f(z) dz + \int_{\ell}^R f(z) dz \right) = - \int_{C_{\ell}} f(z) dz$$

$$\text{donde } \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left(\int_{-R}^{-\ell} f + \int_{\ell}^R f \right) = - \operatorname{Im} \int_{C_{\ell}} f(z) dz$$

$$= 2 \int_{\ell}^R \frac{\sin 2x}{x} dx$$

$$= 2 \int_{\ell}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$$

Como f tem um pólo simples no zero, segue-se de uma proposição demonstrada em aula que:

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \int_{C_{\ell}} f(z) dz = - \pi i \operatorname{Res}(f, 0) = - \pi i$$

$$\text{donde } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = 2 \lim_{\ell \rightarrow 0} \int_{\ell}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = - \operatorname{Im} \lim_{\ell \rightarrow 0} \int_{C_{\ell}} f = \boxed{\pi}$$

(5)

QUESTÃO 3. (2 pts.) Calcule:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cos \theta + 2)^2} d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cos \theta + 2)^2} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(\frac{z+\bar{z}^1}{2} + 2\right)^2} \frac{dz}{iz} =$$

$$= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{4z dz}{(z^2 + 4z + 1)^2} = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{4z}{(z^2 + 4z + 1)^2}, -2 + \sqrt{3} \right)$$

teorema do
resíduo

$$\operatorname{Res} \left(\frac{4z}{(z^2 + 4z + 1)^2}, -2 + \sqrt{3} \right) = g'(-2 + \sqrt{3})$$

$$\text{onde } g(z) = \frac{4z}{[z - (-2 - \sqrt{3})]^2}$$

$$\therefore g'(z) = \frac{4}{[z - (-2 - \sqrt{3})]^2} - \frac{8z}{[z - (-2 - \sqrt{3})]^3}$$

$$\therefore g'(-2 + \sqrt{3}) = \frac{4}{(2\sqrt{3})^2} - \frac{8(-2 + \sqrt{3})}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{16}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cos \theta + 2)^2} d\theta = 2\pi \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}$$