(1)

QUESTÃO 1. (5 ptos.) *Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.*

(a) *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx + i\cos ny}{n^2}$ *converge uniformemente em* $\mathbb{C}$.

(b) *Sejam* $u, v : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ *funções de classe* C^2 *definidas no aberto* $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$. *Se* $f = u + iv : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *for analítica, então* u *e* v *são harmônicas.*

(c) *A função* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(z) = \overline{z}$ *é analítica.*

(d) *Todos os zeros de* $\operatorname{sen} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *são reais.*

(e) *Existe um ramo do logaritmo definido em* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(a) Verdadeiro: $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{sen} nx + i\cos ny| = \operatorname{sen}^2 nx + \cos^2 ny \leq 2$; como $\sum \frac{2}{n^2} < +\infty$, a tese segue do critério M de Weierstrass.

(b) Verdadeiro. Com efeito, como f é analítica, u e v satisfazem Cauchy-Riemann em $\mathcal{U}$, ou seja, (CR) $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ em $\mathcal{U}$.

Assim, $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} \overset{(CR)}{=} v_{yx} - v_{xy} \overset{(*)}{=} 0 & \text{em } \mathcal{U} \\ v_{xx} + v_{yy} \overset{(CR)}{=} -u_{yx} + u_{xy} \overset{(**)}{=} 0 & \text{em } \mathcal{U} \end{cases}$

onde, em (*) e (**), foi aplicado o teorema de Schwartz.

(c) Falso, pois as condições de Cauchy-Riemann não são satisfeitas.

(d) Verdadeiro. Com efeito, $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cos iy + \cos x \operatorname{sen} iy =$$

$$= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$

$$\therefore \operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x \cosh y = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x \operatorname{senh} y = 0 \overset{\operatorname{sen} x = 0 \therefore \cos x \neq 0}{\Leftrightarrow} \operatorname{senh} y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{cases}$$

i.e. $\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = x \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen} x = 0$.

(e) Falso. Com efeito, $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} = 2\pi i \neq 0$,

logo $\begin{aligned} \mathbb{C}\setminus\{0\} &\xrightarrow{g} \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$ não admite primitiva

(se existisse $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ ramo do logaritmo, tal função seria uma primitiva de g).

QUESTÃO **2.** (2 ptos.)

(a) *Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ uma função analítica cuja parte real se anula identicamente. Mostre que f é uma função constante.*

(b) *Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 1/z^2$. Mostre que é nula a integral de f ao longo de qualquer curva fechada seccionalmente C^1 cuja imagem não passe pelo 0.*

(a) Seja $f = u + iv : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica no aberto conexo $\mathcal{U}$, tal que $u \equiv 0$. Por Cauchy-Riemann, tem-se $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ em $\mathcal{U}$, donde

$v_x \equiv 0$ e $v_y \equiv 0$ em $\mathcal{U}$, logo v é constante em $\mathcal{U}$ (pois $\mathcal{U}$ é conexo). #

(b) Com efeito, seja $F: \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$.
$z \longmapsto -1/z$

Então F é primitiva de f $\therefore \int_\gamma f = 0$ para toda γ fechada seccionalmente C^1 com $\gamma^* \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$.
#

QUESTÃO **3.** (3 ptos.)

(a) *Calcule a integral de* $f(z) = z^2$ *ao longo do quadrado de vértices* 1, i, -1, $-i$, *percorrido no sentido anti-horário.*

(b) *Calcule:*

$$\oint_{|z|=2} \frac{2z\,\mathrm{d}z}{z^2+1},$$

onde o círculo é percorrido no sentido anti-horário.

(a) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica
$\mathbb{C}$ simplesmente conexo
$\overset{\text{teo. da integral de Cauchy}}{\Longrightarrow}$

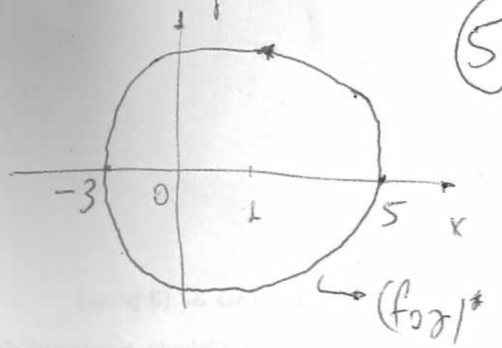
$\Rightarrow \int_\gamma f = 0$ para toda γ seccionalmente C^1 fechada simples.

(b) Sejam $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z^2+1$ e $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto 2e^{it}$.

Então $$\oint_{|z|=2} \frac{2z\,dz}{z^2+1} = \oint_\gamma \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} \overset{w = f(z),\ f \text{ analítica}}{=} \oint_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w}$$

Como $(\forall t \in [0, 2\pi])\ f\circ\gamma(t) = (2e^{it})^2 + 1 = 4e^{2it} + 1$ parametriza o círculo de raio 4, centrado em 1, percorrido duas vezes no sentido anti-horário, tem-se:

$$\int_{f\circ\gamma}\frac{dw}{w} = 2\int_{|z-1|=4}\frac{dw}{w} =$$



$$= 2\cdot 2\pi i = \boxed{4\pi i}.$$