QUESTÃO 1. (3 ptos.) *Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes ou divergentes:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!+1}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$

(iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

(i) Sejam $(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} a_n \doteq \frac{n^2}{n!+1} \\ b_n \doteq \frac{n^2}{n!} \end{cases}$

Tem-se: (1) $(\forall n)\, b_n > 0$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n!}{(n+1)n!} =$

$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \therefore \sum b_n < +\infty$, pelo teste da razão.

(2) $(\forall n)\quad a_n = |a_n| \leq b_n \quad \therefore \sum a_n$ converge absolutamente, pelo critério da comparação. #

(ii) Seja $(\forall n \in \mathbb{N})\; a_n \doteq \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$. Tem-se $(\forall n)\, a_n > 0$

e $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \therefore \sum a_n$ converge absolutamente, pelo critério da raiz. #

(iii) $(\forall n \geq 3)\; \frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n}$. Como $\sum \frac{1}{n} = +\infty$,

segue-se que $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge pelo critério da comparação. Por outro lado, seja $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$.

f é derivável e $\forall x > 0 : f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} =$

$$= \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$$

$\therefore f' < 0$ em $(e, +\infty)$.

Além disso, segue-se da regra de l'Hôpital que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Assim, pondo $(\forall n \geq 3)\ a_n \doteq \frac{\ln n}{n}$, tem-se

$(\forall n \geq 3)\ a_n > 0$, $(a_n)_n$ decrescente e $a_n \to 0$.

Logo, pelo critério de Leibnitz, conclui-se que

$\sum (-1)^n a_n < +\infty$. Conclusão: $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ converge

condicionalmente. #

QUESTÃO **2.** (2 ptos.) *Encontre o raio de convergência das seguintes séries de potências. Estude a convergência das séries nos extremos dos respectivos intervalos de convergência.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} x^n$

(a) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:

$(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n^2} = 2^n$, $a_k = 0$ se $\nexists n / k = n^2$.

Então $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n^2]{2^n} = \lim 2^{\frac{n}{n^2}} =$

$= \lim 2^{\frac{1}{n}} = 1$ $\therefore$ a série $\sum a_n x^n$ tem r.c. 1, e seu intervalo de convergência é $(-1, 1)$.

Para $x = \pm 1$, $\sum 2^n x^{n^2}$ diverge pelo critério do termo geral. #

(b) Seja $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \doteq \frac{3^n}{n4^n}$. Tem-se:

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{4\sqrt[n]{n}} \to \frac{3}{4}$ $\therefore$ $\sum a_n x^n$ tem r.c. $\frac{4}{3}$

e intervalo de convergência $\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Para $\begin{cases} x = \frac{4}{3} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge} \\ x = -\frac{4}{3} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \text{ converge por Leibnitz. \#} \end{cases}$

QUESTÃO 3. (2 ptos.)

(i) *Encontre a série de Maclaurin de* $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$. SUGESTÃO: *expanda* $\frac{1}{1-x}$ *numa série de potências de* x *e aplique o teorema da integração termo a termo.*

(ii) *Encontre o conjunto dos pontos onde a série de Maclaurin de* f *converge; mostre que* f *é a soma da referida série nesse conjunto.*

(i) Tem-se, $\forall x \in (-1,1)$: $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Como $\dfrac{d}{dx}\left[\ln \dfrac{1}{1-x}\right] = \dfrac{1}{1-x}$, segue-se do teorema fundamental do Cálculo que, $\forall x \in (-1,1)$:

$$\ln \frac{1}{1-x} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

a série $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ converge uniformemente no intervalo fechado com extremos 0 e x

$\therefore$ podemos aplicar o teorema da integração termo a termo

$\therefore$ a série de Maclaurin de f é $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

(já vimos que, se uma função f for a soma de uma série de potências centrada em $x_0 \in \mathbb{R}$, necessariamente a referida série é a série de Taylor de f centrada em x_0).

(ii) A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ tem intervalo de convergência $(-1, 1)$.

- Em $x = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$
- Em $x = -1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} < +\infty$

pelo crit. de Leibnitz

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge se $x \in [-1, 1)$ e diverge caso contrário.

Do item anterior, já sabemos que $\forall x \in (-1, 1)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Resta verificar que $f(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

Sabemos que f é contínua e que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge uniformemente em qualquer subintervalo compacto de $[-1, 1)$, pelo teorema de Abel. Portanto:

$$f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to -1^+} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}. \quad \#$$

podemos trocar os limites pelo conv. uniforme em $[-1, c]$, $c > -1$

QUESTÃO 4. (3 ptos.) *Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.*

(i) *A série* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *converge uniformemente no intervalo* $[-1, 1]$.

(ii) *Se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for uma sequência de números positivos tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *é convergente.*

(iii) *Se uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$, *então ela converge uniformemente no intervalo* $(-R, R)$.

(i) Pondo $(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} a_{2n} = 0 \\ a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{2n+1} \end{cases}$

tem-se $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[2n+1]{\dfrac{1}{2n+1}} = 1$

$\therefore$ a série $\sum a_n x^n$ tem r.c. 1 e seu intervalo de conv. é $(-1, 1)$.

Em $x = \pm 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \pm \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} < +\infty$ por Leibnitz.

Assim, pelo teorema de Abel, $\sum a_n x^n$ conv. uniformemente em $[-1, 1]$. Verdadeiro #

(ii) Falso. Tome $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} a_{2n} = \dfrac{2}{n} \\ a_{2n+1} = \dfrac{1}{n} \end{cases}$

Então $(\forall n)\ a_n > 0$ e $\lim a_n = 0$, mas

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = +\infty. \quad \#$$

(iii) <u>Falso</u>. A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ tem r.c. 1 mas a convergência não é uniforme em $(-1,1)$ [verifique esta última afirmação como exercício, caso ainda não o tenha feito]. #