MAT 220 - Cálculo IV - IF, 2010

Notas de Aula - Funções de 1 variável complexa

7) Limites de Funções Complexas

Limites já foram definidos no item 3.) - vide notas da semana passada - para funções definidas num espaço métrico a valores noutro esp. métrico. Aqui seguem algumas propriedades:

Prop. [Limites de funções complexas]:

1.) Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $a \in X'$, $f : X \to \mathbb{C}$. Tem-se:

(i) Se f tiver limite em a, o limite é único.

(ii) $\lim_{z \to a} f(z) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{z \to a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} \ell \\ \lim_{z \to a} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} \ell \end{cases}$

(iii) $\lim_{z \to a} f(z) = \ell \iff \forall (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em $X \setminus \{a\}$ t.q. $z_n \to a$, tem-se $f(z_n) \to \ell$

(iv) $\lim_{z \to a} f(z) = 0 \iff \lim_{z \to a} |f(z)| = 0$.

2.) Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $a \in X'$, $f, g : X \to \mathbb{C}$.

(i) Se $\lim_{z \to a} f(z) = \ell_1$ e $\lim_{z \to a} g(z) = \ell_2$, então:

$$\lim_{z \to a} (f \pm g)(z) = \ell_1 \pm \ell_2, \quad \lim_{z \to a} (f \cdot g)(z) = \ell_1 \cdot \ell_2,$$

$$\lim_{z \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{\ell_1}{\ell_2} \text{ se } \ell_2 \neq 0$$

(ii) $\left.\begin{array}{l} \lim_{z \to a} f(z) = 0 \\ g \text{ limitada} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{z \to a} (f \cdot g)(z) = 0$

3.) [limite de função composta]

Sejam $f : X \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : Y \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(X) \subset Y$, $a \in X'$, $b \in \mathbb{C}$. Tem-se:

(i) Se $\lim_{z \to a} f(z) = b \notin f(X)$, então $b \in Y'$. Neste caso, se $\exists \lim_{w \to b} g(w) = l$, então $\exists \lim_{z \to a} (g \circ f)(z) = l$

(ii) Se $\lim_{z \to a} f(z) = b \in Y$ e g contínua em b, então $\exists \lim_{z \to a} (g \circ f)(z) = g(\lim_{z \to a} f(z)) = g(b)$.

Dem.: Faz-se como no caso de funções de uma variável real a valores reais e fica como exercício. #

8.) Funções Analíticas

Def.: Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto, $f : U \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$.

(i) Diz-se que f é derivável em z_0 se $\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Em caso afirmativo, define-se a derivada de f em z_0 (notação: $f'(z_0)$) como sendo o valor do referido limite.

(ii) Diz-se que f é derivável se o for em todos os pontos de U. Neste caso, define-se a função derivada de f,
$$f' : U \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f'(z)$$

(iii) Diz-se que f é analítica se for derivável em U e $f' : U \to \mathbb{C}$ for contínua.

Obs.: existe um teorema (de Goursat) que garante que, se f for derivável em U, então $f' : U \to \mathbb{C}$ é contínua (i.e. f derivável $\Rightarrow$ f analítica). Este teorema não será demonstrado no curso.

Prop.: Se $f : U \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ for derivável em $z_0 \in U$, então f é contínua em z_0.

Dem.: $\forall z \in U \setminus \{z_0\}$, $f(z) - f(z_0) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0)$

$\therefore \exists \lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = f'(z_0) \cdot 0 = 0$, i.e.

$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. #

Teorema [relação entre diferenciabilidade $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e diferenciabilidade $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no sentido de Fréchet; equações de Cauchy-Riemann]: Sejam $U \overset{ab}{\subset} \mathbb{C}$, $z_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$. Denotemos $u \doteq \operatorname{Re} f$, $v \doteq \operatorname{Im} f$, de modo que $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$. Então, as seguintes condições são equivalentes:

(i) f é derivável em z_0.

(ii) u e v são deriváveis em z_0 (como funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$) e $\begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = -v_x(z_0) \end{cases}$ [eq. de Cauchy-Riemann]

Em caso afirmativo, tem-se:

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0) = v_y(z_0) - i u_y(z_0)$$

Obs.: Seja $T = a + ib \in \mathbb{C}$. A multiplicação complexa por T define uma aplicação $\mathbb{C}$-linear (em particular, $\mathbb{R}$-linear) de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, dada por:

$$\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z = (x, y) \longmapsto T \cdot z = (a + ib) \cdot (x + iy) =$$
$$= (ax - by, ay + bx) =$$
$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

de modo que $\begin{cases} Re(T \cdot z) = \langle (a, -b), (x, y) \rangle \\ Im(T \cdot z) = \langle (b, a), (x, y) \rangle \end{cases}$.

Dem. do teorema:

$\forall z \in U \setminus \{z_0\}$, $\forall T = a + ib \in \mathbb{C}$, tem-se:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - T = \frac{f(z) - f(z_0) - T \cdot (z - z_0)}{z - z_0}$$

$\therefore \exists f'(z_0)$ e $f'(z_0) = T \iff \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0) - T \cdot (z - z_0)}{z - z_0} = 0 \iff$

$$\iff \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - T \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

Mas: $\dfrac{f(z) - f(z_0) - T \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} = \dfrac{u(z) - u(z_0) - \langle (a, -b), z - z_0 \rangle}{|z - z_0|} +$

$$+ i \, \frac{v(z) - v(z_0) - \langle (b, a), z - z_0 \rangle}{|z - z_0|}$$

$\therefore \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0) - T \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} = 0 \iff$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ e } v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ são deriváveis em } z_0 \\ u_x(z_0) = a = v_y(z_0) \\ -u_y(z_0) = b = v_x(z_0) \end{cases}$ #

Corolário: Seja $f = u + iv : U \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
Então são equivalentes:
(i) f é analítica
(ii) u e v são de classe C^1 e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (C.R.)$$

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii): Se f é analítica, pelo teo. anterior u e v são deriváveis e satisfazem (C.R.) em todos os pontos. Além disso, $(\forall z \in U)$ $f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = v_y(z) - i u_y(z)$, portanto a continuidade de f' implica u e $v \in C^1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Se $u, v \in C^1$, então u e v são funções $U \to \mathbb{R}$ deriváveis (conforme demonstrado no curso de Cálculo II). Como satisfazem (C.R.), o teorema anterior garante que f é derivável em todos os pontos de U, e a continuidade de f' segue-se da continuidade de u_x e v_x, pois $f' = u_x + i v_x$. #

Prop. [regras de derivação]: Sejam $f, g : U \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ deriváveis em $z_0 \in U$. Tem-se:

(i) $f \pm g$ e $f \cdot g$ são deriváveis em z_0 e

$$\begin{cases} (f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0), \\ (f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0) \end{cases}$$

(ii) se $(\forall z) g(z) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ é derivável em z_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) g(z_0) - f(z_0) g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

Prop. [regra da cadeia]: Sejam $f : U \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : V \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(U) \subset V$, f derivável em $z_0 \in U$ e g derivável em $w_0 = g(z_0)$. Então $g \circ f$ é derivável em z_0 e $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.

Dem.: As demonstrações das duas prop. se fazem como no Cálculo I e ficam como exercício.

Corolário: Somas, produtos, quocientes e compostas de funções analíticas são funções analíticas!

Exemplo: 1) Funções polinomiais $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são analíticas. Se

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k,$$

$$f' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot z^{k-1}$$

2) Funções racionais $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são analíticas.

Teorema [analiticidade de funções dadas por séries de potências]:
Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ uma série de potências (dados $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seq. em $\mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$) com raio de convergência $R > 0$. Então:
(i) $\forall k \geq 1$, a série

$$\sum_{n=k}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\, a_n (z-a)^{n-k} \quad (*)$$

tem raio de convergência R.

(ii) Seja $f : B_R(a) \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n$.
Então f tem derivadas de todas as ordens e $(\forall k \geq 1)$ $f^{(k)} : B_R(a) \to \mathbb{C}$ é dada pela soma da série $(*)$.

(iii) $(\forall n \geq 0)$ $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$

$\left(\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n\right.$ é a série de Taylor de f centrada em a).

Dem.: (iii) é consequência imediata de (i) e (ii). Basta verificar (i) e (ii) p/ $k=1$, pois o caso geral se reduz a este (por indução sobre k); neste caso, (i) se verifica como no teo. análogo demonstrado p/ séries de potências em $\mathbb{R}$, a partir da fórmula de Hadamard p/ o raio de convergência. Resta verificar (ii) p/ $k=1$.

Sejam $f : B_R(a) \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$
$g : B_R(a) \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (z-a)^{n-1}$

Queremos demonstrar que f é derivável e $f' = g$. Fixemos $w \in B_R(a)$; tome $r > 0$ t.q. $|w| < r < R$ e $\delta_1 > 0$ t.q. $B_{\delta_1}(w) \subset B_r(a)$. Usaremos a seguinte notação:

$(\forall n \in \mathbb{N})$ $s_n(z) \doteq \sum_{k=0}^{n} a_k (z-a)^k$
$R_n(z) \doteq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z-a)^k$,

de modo que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in B_R(a)$, $f(z) = s_n(z) + R_n(z)$.

Tem-se, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in B_{\delta_1}(w) \setminus \{w\}$

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| = \left| \frac{s_n(z) + R_n(z) - [s_n(w) + R_n(w)]}{z - w} - g(w) \right| = \left| \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s_n'(w) + s_n'(w) - g(w) + \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| \leq \left| \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s_n'(w) \right| + \left| s_n'(w) - g(w) \right| + \left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| \quad (*)$$

Por outro lado, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in B_{\delta_1}(w) \setminus \{w\}$:

$$\frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} = \frac{1}{z - w} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left[(z-a)^k - (w-a)^k\right] = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{(z-a)^k - (w-a)^k}{(z-a) - (w-a)}$$

Mas, $\left| \frac{(z-a)^k - (w-a)^k}{(z-a) - (w-a)} \right| = \left| (z-a)^{k-1} + (z-a)^{k-2}(w-a) + \cdots + (w-a)^{k-1} \right| \leq k r^{k-1}$,

e, como $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot k r^{k-1} < +\infty$ (pois $r < R$), segue-se $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in B_{\delta_1}(w) \setminus \{w\}$:

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| \leq \sum_{K=n+1}^{\infty} |a_K| \cdot K \cdot r^{K-1}$$

Dado $\varepsilon > 0$, pelo fato de ser $\sum_{K=1}^{\infty} |a_K| \cdot K \cdot r^{K-1} < +\infty$, o critério de Cauchy garante que:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N_1 : \sum_{K=n+1}^{\infty} |a_K| \cdot K r^{K-1} < \frac{\varepsilon}{3},$$

donde, $\forall n \geq N_1$, $\forall z \in B_{\delta_1}(w)$, $\left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. (1)

Como $s_n'(z)$ é a seq. das reduzidas da série $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z-a)^{n-1}$, segue-se que $s_n'(w) \to g(w)$,

$\therefore \exists N_2 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_2 \Rightarrow |s_n'(w) - g(w)| < \varepsilon/3$. (2)

Tome $N = \max\{N_1, N_2\}$. $\exists \delta > 0$ tal que $\delta < \delta_1$ e $\forall z \in B_\delta(w) \setminus \{w\}$:

$$\left| \frac{s_N(z) - s_N(w)}{z - w} - s_N'(w) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3)$$

Usando-se as estimativas (1), (2) e (3) em (*), com $n = N$, conclui-se que, $\forall z \in B_\delta(w) \setminus \{w\}$:

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| < \varepsilon$$

$\therefore$ f é derivável em w e $f'(w) = g(w)$.

Como $w \in B_R(a)$ foi tomado arbitrariamente, a última sentença vale $\forall w \in B_R(a)$, o que conclui a demonstração. #

Corolário: Com a mesma notação do teorema, f é analítica.

Corolário: $\exp, \operatorname{sen}, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são analíticas, $\exp' = \exp$, $\operatorname{sen}' = \cos$ e $\cos' = -\operatorname{sen}$.

Dem.: Tem-se, $\forall z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, sendo o r.c. da série $+\infty$. Pelo teorema, $\exp$ é analítica e $(\forall z \in \mathbb{C})$ $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$.

Analogamente se argumenta p/ $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ (também pode-se usar as fórmulas $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ e $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, que decorrem da fórmula de Euler). #

Teorema [Derivadas de Funções Inversas]:

Sejam $g : U \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $f : V \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contínuas, tais que $f(V) \subset U$ e $(\forall z \in V)\ g(f(z)) = z$. Suponha que, dado $z_0 \in V$, g seja derivável em $f(z_0)$ e $g'(f(z_0)) \neq 0$. Então f é derivável em z_0 e $f'(z_0) = \frac{1}{g'(f(z_0))}$.

Dem.: $\forall z \in V \setminus \{z_0\}$: $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}} =$

$= \frac{1}{\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}} = \frac{1}{G(f(z))}$ (*)

onde $G: U \longrightarrow \mathbb{C}$

$$w \longmapsto \begin{cases} \frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)} & \text{se } w \neq f(z_0) \\ g'(f(z_0)) & \text{se } w = f(z_0) \end{cases}$$

Note que f é injetiva ($\therefore f(z) \neq f(z_0)$ se $z \neq z_0$), pelo fato de ser $g \circ f = id_V$.

Como $\begin{cases} G \text{ é contínua em } f(z_0) \\ \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \text{ (pois } f \text{ é contínua)} \end{cases}$,

segue-se do teo. limite de fç composta que $\exists \lim_{z \to z_0} G(f(z)) = G(f(z_0)) = g'(f(z_0)) \neq 0$

$\therefore$ de (*) segue-se: $\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{g'(f(z_0))}$ #

Corolário: Com a mesma notação do teo., se g é analítica e g' não se anula em U, então f é analítica e $(\forall z \in V)$ $f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}$.

Conjuntos conexos em $\mathbb{C}$

$\overset{\mathbb{R}^2}{=}$ (obs.: a mesma definição vale em $\mathbb{R}^n$)

Def.: 1.) Dados $a, b \in \mathbb{C}$, $[a,b] \doteq \{x \in \mathbb{C} / x = ta + (1-t)b,\ 0 \leq t \leq 1\}$ é o segmento fechado com extremos a e b.

2.) Dados $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, a poligonal $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é a união $\bigcup_{2 \leq i \leq n} [x_{i-1}, x_i]$.

3.) $A \subset \mathbb{C}$ dit-se conexo se $\forall a, b \in \mathbb{C}$, existe uma poligonal $[x_1, \dots, x_n] \subset A$ tal que $x_1 = a$, $x_n = b$.

Prop.: Seja $u : \overset{ab}{U} \subset \mathbb{C} \overset{\mathbb{R}^2}{=} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no aberto conexo U, tal que $(\forall x \in U)\ \nabla u(x) = 0$. Então u é constante.

Dem.: Basta verificar que u é constante ao longo de qualquer poligonal contida em U (pois, pela conexidade de U, dois pontos quaisquer de U podem ser ligados por uma tal poligonal). Para tal, basta verificar que u é cte. ao longo de qualquer segmento fechado contido em U (pois toda poligonal é, por definição, a união de um nº finito de segmentos fechados). Assim sendo, sejam $a, b \in U$ tais que $[a,b] \subset U$, e $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$
$t \longmapsto (1-t)a + tb$

Como γ é derivável, segue-se da regra da cadeia que $u \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável e $(\forall t \in [0,1])\ (u \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla u(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$
$\therefore u \circ \gamma$ é constante, como o corolário do

teorema do valor médio (Cálculo I). Então u é constante em $[a,b]$, como afirmado. #

<u>Corolário</u>: Seja $f : \mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica no aberto conexo $\mathcal{U}$, tal que $(\forall z \in \mathcal{U})\ f'(z) = 0$. Então f é constante.

<u>Dem.</u>: Sejam $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$, de modo que $(\forall z \in \mathcal{U})\ f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = v_y(z) - i u_y(z) = 0$. Então $u, v : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ são deriváveis e $(\forall z \in \mathcal{U})\ \nabla u(z) = 0 = \nabla v(z)$, donde u e v são constantes em $\mathcal{U}$, pela prop. anterior. #

<u>Obs.</u>: Pode-se demonstrar que $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, $\forall a, b \in \mathcal{U}$, $\exists \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}$ contínua t.q. $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$. Uma das implicações é imediata e a outra fica como exercício para quem já estudou Espaços Métricos.

<u>Prop.</u> [propriedades dos conjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$]:

1.) $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, $\mathcal{U}$ for um <u>intervalo</u> (obs.: um conjunto formado por um único ponto é um intervalo).

2.) Se $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ for contínua, então f leva conjuntos conexos em conjuntos conexos, i.e. $\forall Y \subset X$, Y conexo $\Longrightarrow f(Y)$ conexo.

<u>Dem. de 2.)</u>: Sejam $a, b \in f(Y)$. Então existem $a_1, b_1 \in Y$ t.q. $f(a_1) = a$ e $f(b_1) = b$.

Pelo conexidade de Y e pela obs. anterior, $\exists\ \gamma : [0,1] \to Y$ contínua t.q. $\gamma(0) = a_1$, $\gamma(1) = b_1$. Então $f \circ \gamma : [0,1] \to f(Y)$ é contínua e $f\circ\gamma(0) = a$, $f\circ\gamma(1) = b$. Pela arbitrariedade de $a, b \in f(Y)$ tomados, segue-se que $f(Y)$ é conexo. #

Logaritmos

Note que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é periódica, com período $2\pi i$:

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad e^{z+2\pi i} = e^{z} \cdot \overbrace{e^{2\pi i}}^{=1} = e^{z}$$

Em particular, exp não é injetiva. Para que faça sentido falar em inversa de exp, devemos, portanto, tomar a restrição da referida função a um aberto no qual ela seja injetiva; além disso, gostaríamos que a inversa (da restrição) também fosse analítica, e para garantir isso gostaríamos que fossem satisfeitas as hipóteses do teorema p/ derivação de funções inversas (i.e. que a inversa da restrição fosse contínua). Isto motiva a seguinte definição:

Def.: Seja $U \overset{ab}{\subset} \mathbb{C}$ conexo. Suponha que $\exists f : U \to \mathbb{C}$ contínua tal que $(\forall z \in U)\ \exp[f(z)] = z$. Uma tal função chama-se ramo do logaritmo em U.

Obs.: A condição de conexidade é colocada p/ garantir, como veremos, que ramos do logaritmo em U

fiquem determinados a menos de uma constante aditiva $2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$ fixo.

Prop.: Com a notação da def. acima, um ramo do logaritmo $f: U \to \mathbb{C}$ é uma função analítica e $(\forall z \in U)\ f'(z) = 1/z$.

Dem.: f contínua (por def.)
$\exp \circ f = id_U$
$\forall z \in \mathbb{C},\ \exp'(z) = \exp(z) \neq 0$

$\Rightarrow$ t. p/ derivação de funções inversas

$\Rightarrow f$ derivável e $(\forall z \in U)\ f'(z) = \dfrac{1}{\exp'(f(z))} =$

$= \dfrac{1}{\exp(f(z))} = \dfrac{1}{z}$ $\therefore$ f' é contínua $\therefore$ f analítica.

\#

Prop.: Seja $U \overset{ab}{\subset} \mathbb{C}$ aberto conexo. Suponha que exista $f: U \to \mathbb{C}$ ramo do logaritmo em U. Então $F: U \to \mathbb{C}$ é outro ramo do logaritmo em U se, e somente se, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ t.q. $F = f + 2\pi i n_0$, i.e. $F: U \to \mathbb{C}$
$$z \mapsto f(z) + 2\pi i n_0$$

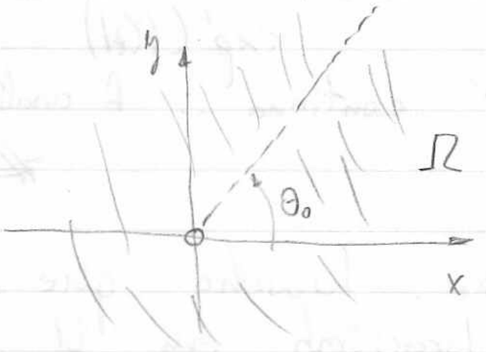
Dem.: Por um lado, se $f: U \to \mathbb{C}$ ramo do logaritmo e $n_0 \in \mathbb{N}$, é claro que $F: U \to \mathbb{C}$ dada por $F(z) = f(z) + 2\pi i n_0$ é ramo do logaritmo em U, pois é contínua e $(\forall z \in U)\ \exp[F(z)] = z$.

Por outro lado, suponha que $F: U \to \mathbb{C}$ seja ramo do logaritmo. Então F é analítica e $(\forall z)\ F'(z) = \dfrac{1}{z}$. Portanto, $F - f: U \to \mathbb{C}$

é analítica e sua derivada se anula identicamente; como $\mathcal{U}$ é conexo, $\exists K \in \mathbb{C}$ t.q. $F - f = cte. = K$. Dado $z \in \mathcal{U}$, tem-se $z = \exp[F(z)] = \exp[f(z) + K] = \exp[f(z)] \cdot \exp K = z \cdot \exp K \therefore \exp K = 1 \therefore$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ t.q. $K = 2\pi i \cdot n_0$. #

Para que a definição anterior faça sentido, devemos exibir ao menos um ramo do logaritmo, o que faremos no seguinte exemplo:

Exemplo: Fixe $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Tome $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta_0} / r \in [0, +\infty)\}$



Defina $\log : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto \ln|z| + i \arg z$
onde $\theta_0 < \arg z < \theta_0 + 2\pi$

Afirmo que log é um ramo do logaritmo em Ω. Com efeito, basta verificar que log assim definida é uma aplicação contínua, pois é claro que $(\forall z \in \Omega)\ \exp[\log(z)] = e^{\ln|z|} \cdot e^{i \arg z} = |z|(\cos \arg(z) + i \operatorname{sen} \arg(z)) = z$.

Prova de que log é contínua:

1) Note que, $\forall \alpha \in]-\pi, \pi[$, $\frac{\alpha}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\therefore \frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$

$= \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1} \quad \therefore \quad \alpha = 2 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + 1}\right)$

2). Dado $z \in \Omega$, $\arg z \in \,]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \arg z - \theta_0 - \pi \in \,]-\pi, \pi[$

$\therefore$ (por ①) $\arg z - \theta_0 - \pi = 2 \operatorname{arctg}\left[\dfrac{|z|}{|z|} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} \arg z}{\cos \arg z + 1}\right] =$

$= 2 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right)$

donde $\underset{\operatorname{Im} \log z}{\underset{\parallel}{\arg z}} = \theta_0 + \pi + 2 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right)$

Como $z \mapsto \operatorname{Im} z$, $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto |z|$ são funções contínuas em Ω e $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, segue-se que $\operatorname{Im} \log$ é contínua. Trivialmente, $\operatorname{Re} \log$ é contínua $\therefore \log : \Omega \to \mathbb{C}$ é contínua. #

Def.: Com a notação do exemplo acima, a função log obtida com $\theta_0 = -\pi$ chama-se ramo principal do logaritmo, e denota-se por Log:

$$\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \{x + 0i \,/\, x \leq 0\} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \ln|z| + i \underbrace{\operatorname{Arg} z}_{\in \,]-\pi, \pi[}$$

de modo que a imagem de Log é a faixa $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \,/\, -\pi < y < \pi\}$.

Cuidado: Não é verdade que $(\forall z_1, z_2 \in \mathrm{dom}\,\mathrm{Log})$ $\mathrm{Log}\, z_1 \cdot z_2 = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$!
Tome $z_1 = i$, $z_2 = -1+i$ e faça as contas.

Potência λ-ésima

Recorde que, no Cálculo I, definiu-se potência com expoente real usando-se a função logarítmica:

$$\forall x > 0, \ \forall r \in \mathbb{R}, \ x^r \doteq \exp(r \ln x).$$

Faremos o mesmo no caso complexo:

Def.: Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f: U \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um ramo do logaritmo no aberto conexo U. A aplicação:

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{F} \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \exp(\lambda f(z)) \end{aligned}$$

chama-se ramo da λ-ésima potência. Usa-se a notação $z^\lambda \doteq F(z)$ (mas tome cuidado com esta notação, pois z^λ depende do ramo do logaritmo f pré-escolhido).

Exercício: Com a notação da definição anterior, verifique que:
(1) $z \in U \longmapsto z^\lambda$ é analítica e $\frac{d}{dz}(z^\lambda) = \lambda z^{\lambda-1}$.
(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $z^{\lambda+\mu} = z^\lambda \cdot z^\mu$
(3) Se $\lambda \in \mathbb{Z}$, z^λ independe do ramo do logaritmo tomado em U, e coincide com a função usualmente denotada por esta notação.

9) Integrais complexas

Def.: Seja $f: [a,b] \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} \mathbb{C}$ uma função limitada. Diz-se que f é integrável (segundo Riemann) se $\operatorname{Re} f: [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o forem. Em caso afirmativo:

$$\int_a^b f \doteq \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f \in \mathbb{C}$$

Para esta integral, valem as propriedades da integral de Riemann estudadas no Cálculo I (basta aplicar os teoremas p/ a parte real e p/ a parte imaginária). Em particular, vale o 1º e 2º teo. fund. do Cálculo.

Prop.: Se $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ for integrável, $|f|: [a,b] \to \mathbb{R}$ também o é e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Dem.: Tome $\theta = \arg\left(\int_a^b f\right)$, de modo que $\left|\int_a^b f\right| = e^{-i\theta} \int_a^b f = \int_a^b e^{-i\theta} f = \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta} f] + i \int_a^b \operatorname{Im}[e^{-i\theta} f]$.

Como $\left|\int_a^b f\right| \in \mathbb{R}$, segue-se que $\int_a^b \operatorname{Im}[e^{-i\theta} f] = 0$ e:

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b \underbrace{\operatorname{Re}[e^{-i\theta} f]}_{\leq |e^{-i\theta} f| = |f|} \leq \int_a^b |f| \quad . \quad \#$$

Def.: Sejam $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ e $1 \leq k \leq \infty$. Diz-se que γ é C^k por partes, ou seccionalmente C^k, se existir uma partição $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que (p/ $1 \leq i \leq n$) $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{C}$

é de classe C^k.

<u>Notação</u>: Se $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, usaremos a notação γ^* ou $\{\gamma\}$ para denotar a imagem de γ, i.e. $\gamma^* \doteq \{\gamma\} \doteq \gamma([a,b])$.

<u>Def.</u>: Sejam $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ C^1 por partes e $f : \gamma^* \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua. Chama-se <u>integral de f sobre γ</u> o nº complexo

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \overset{\text{multiplicação complexa}}{\cdot} \gamma'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

onde $\{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$ partição de $[a,b]$ / $\gamma \in C^1$ em cada intervalo da partição.

Usa-se a <u>notação</u> $\int_\gamma f$ ou $\int_\gamma f(z)\,dz$ para denotar a referida integral.

<u>Obs.</u>: Se $\begin{cases} f = u + iv : \gamma^* \to \mathbb{C} \\ \gamma = x + iy : [a,b] \to \mathbb{C} \end{cases}$, tem-se:

$$f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = u(\gamma(t))\,x'(t) - v(\gamma(t))\,y'(t) + i\,[u(\gamma(t))\,y'(t) + v(\gamma(t))\,x'(t)]$$

de modo que $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b [u(\gamma(t))\,x'(t) - v(\gamma(t))\,y'(t)]\,dt + i \int_a^b [u(\gamma(t))\,y'(t) + v(\gamma(t))\,x'(t)]\,dt$

i.e. $\operatorname{Re} \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy$ e

$$\operatorname{Im} \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma v\,dx + u\,dy$$

onde os segundos membros denotam as integrais de linha (do Cálculo III) ao longo de γ dos campos $(u,-v)$ e (v,u), respectivamente.

Em particular, valem as propriedades usuais das integrais de linha estudadas no Cálculo III. Por exemplo, a integral independe da parametrização de γ^*, desde que não se altere o sentido de percurso, i.e.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz$$

se $\gamma^* = \Gamma^*$ e γ' tem o mesmo sentido de Γ'

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_\Gamma f(z)\,dz$$

se $\gamma^* = \Gamma^*$ e γ' tem sentido contrário ao de Γ'.

<u>Prop.</u>: Sejam $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ C^1 por partes e $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ contínua. Então:

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \leq M\ell$$

onde
$$\begin{cases} \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \doteq \int_a^b |f'(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \\ M \doteq \max\{|f(\gamma(t))| \;/\; t \in [a,b]\} \rightsquigarrow \text{máx. de } f \text{ em } \gamma^* \\ \ell \doteq \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \rightsquigarrow \text{comprimento de } \gamma \end{cases}$$

<u>Dem.</u>: exercício.

Prop.: Sejam $\Omega \overset{ab}{\subset} \mathbb{C}$, $\gamma: [a,b] \to \Omega$ C^1 por partes, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, com primitiva $F: \Omega \to \mathbb{C}$ (i.e. $F' = f$). Então:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dem.: Suponha $\gamma \in C^1$; o caso geral se reduz a este, aplicando-se o argumento abaixo p/ cada intervalo onde γ for C^1. Tem-se:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$\underbrace{=}_{\text{regra da cadeia}} \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt \underbrace{=}_{\text{TFC}} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

\#

Corolário: Sejam $\Omega \overset{ab}{\subset} \mathbb{C}$ e $f: \Omega \to \mathbb{C}$ contínua. Se existir uma primitiva de f em Ω, então, para toda curva γ C^1 por partes fechada em Ω (i.e. $\gamma: [a,b] \to \Omega$ C^1 p.p., $\gamma(b) = \gamma(a)$), tem-se:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Exemplo: $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$; $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/z$; $\gamma(t) = e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

Então $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\cdot i e^{it}\,dt = 2\pi i \neq 0$

$\therefore$ f não tem primitiva em Ω, e isto mostra que não existe ramo do logaritmo em Ω!

Veremos que $\left.\begin{array}{l} f \text{ analítica em } \Omega \\ \Omega \text{ simplesmente conexo} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ tem primitiva em Ω.