MAT220 — Cálculo IV — IF 2010

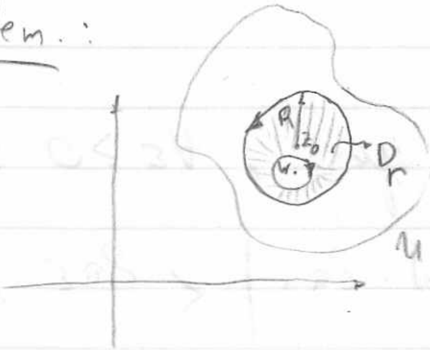
Notas de Aula — Funções de 1 variável complexa, parte II

1.) Fórmula Integral de Cauchy

Teorema 1: Sejam $f : U \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica, $z_0 \in U$ e $R > 0$ tal que $\overline{B}_R(z_0) \subset U$. Então, $\forall w \in B_R(z_0)$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-w}\, dz$$

Dem.:



$\forall r \in \,]0, R[$, considere o aberto:

$$D_r := B_R(z_0) \setminus \overline{B}_r(w)$$

Então $\overline{D_r} \subset U \setminus \{w\}$ e,

como
$$U \setminus \{w\} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad z \longmapsto \frac{f(z)}{z-w}$$
é analítica,

segue-se do teorema da integral de Cauchy que:

$$\int_{\partial D_r} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = 0$$

Ou seja:
$$\oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-w}\, dz \overset{(*)}{=} \oint_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w}\, dz$$

Dado $\varepsilon > 0$, como f é contínua (pois é analítica), existe $\delta \in]0,R[$ t.q. $\forall z \in B_\delta(w)$ tem-se $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Assim, tomando-se $r \in]0, \delta[$, tem-se:

$$\left| \oint_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w}\, dz - \overbrace{f(w) . 2\pi i}^{= \oint_{|z-w|=r} \frac{f(w)\, dz}{z-w}} \right| =$$

$$= \left| \oint_{|z-w|=r} \frac{f(z) - f(w)}{z-w}\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \oint_{|z-w|=r} \frac{\overbrace{|f(z) - f(w)|}^{<\varepsilon}}{\underbrace{|z-w|}_{=r}} |dz| < \frac{\varepsilon}{\cancel{r}} . 2\pi \cancel{r}$$

Portanto, ~~de~~ ~~(1)~~ conclui-se que, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\left| \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-w}\, dz - f(w) . 2\pi i \right| < 2\pi\varepsilon ,$$

o que só pode ocorrer se o 1º membro for nulo. #

—+—

Obs.: Se, no enunciado acima, tomarmos $w = z_0$, obtém-se:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it}) . \cancel{R} \cancel{i} \cancel{e^{it}}\, dt}{\cancel{R} \cancel{e^{it}}} =$$

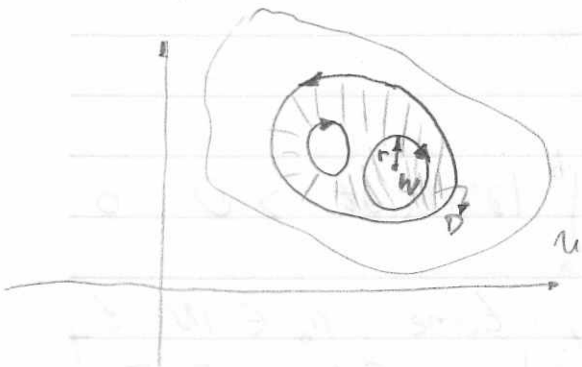
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt = \text{média de } f \text{ em } \partial B_R(z_0).$$

Teorema 2: Sejam $f: \mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica, $D \subset \mathbb{C}$ um aberto t.q. $\overline{D} \subset \mathcal{U}$ e ∂D seja união de um nº finito de curvas fechadas simples, seccionalmente C^1, $w \in D$. Então

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w}\, dz$$

↳ com a orientação usual

Dem.:



Tome $r > 0$ t.q. $\overline{B}_r(w) \subset D$, e considere $D_r \doteq D - \overline{B}_r(w)$.

Então D_r é aberto, $\overline{D_r} \subset \mathcal{U} \setminus \{w\}$

e $\mathcal{U} \setminus \{w\} \longrightarrow \mathbb{C}$ é
$z \longmapsto \frac{f(z)}{z-w}$

analítica; portanto, pelo teorema da integral de Cauchy, tem-se:

$$0 = \int_{\partial D_r} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w}\, dz - \oint_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w}\, dw$$

donde

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \oint_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w}\, dz \underset{\text{teo. 1}}{=} f(w) \cdot 2\pi i$$

#

2) Expansão em série de potências de uma função analítica

Teorema [integração termo a termo]:
Sejam $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ seccionalmente C^1 e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seq. de funções contínuas $\gamma^* \to \mathbb{C}$ uniformemente convergente p/ $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$.
Então $\underbrace{\int_\gamma f}_{\text{"} \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n \text{"}} = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n$

Dem.: Seja $\ell = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt > 0$ o comprimento de γ. Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $(\forall n \geq n_0, \forall z \in \gamma^*)$ $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/\ell$. Então,

$\forall n \geq n_0, \forall z \in \gamma^*$: $\left| \int_\gamma f_n - \int_\gamma f \right| = \left| \int_\gamma (f_n(z) - f(z)) dz \right| \leq$
$\leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)| |dz| < \frac{\varepsilon}{\ell} \cdot \ell = \varepsilon$.

#

<u>Teorema</u>: Sejam $f : U \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, $z_0 \in U$ e $R > 0$ o maior nº positivo t.q. $B_R(z_0) \subset U$. Então existe uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ com r.c. $\geq R$ cuja soma coincide com f em $B_R(z_0)$. Além disso, a referida série é única e $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

para qualquer $r \in]0, R[$.

<u>Corolário</u>: Com a mesma hipótese, f é de classe C^∞ e $\forall z_0 \in U$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

onde $r > 0$ é tal que $\overline{B}_r(z_0) \subset U$.

<u>Dem do teorema</u>:

Seja $r \in]0, R[$, de modo que $\overline{B}_r(z_0) \subset U$. Pela fórmula integral de Cauchy, $\forall z \in B_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w - z_0| = r} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (*)$$

Mas, $\forall w \in \partial B_r(z_0)$, $\forall z \in B_r(z_0)$:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \overset{\left|\frac{z - z_0}{w - z_0}\right| < 1}{=}$$

$$= \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

$$\therefore (*) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}}_{g_n(w)} dw$$

Afirmo que $\sum g_n(w)$ converge uniformemente em $\partial B_r(z_0)$. Com efeito, $\forall w \in \partial B_r(z_0)$:

$$|g_n(w)| = \frac{|f(w)|}{\underbrace{|w-z_0|}_{=r}} \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|^n < \frac{M}{r}\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n$$

onde $M = \max\{|f(w)| \,/\, w \in \partial B_r(z_0)\}$ (que existe, pelo teo. de Weierstrass). Como $\sum \left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n < +\infty$ (pois $\frac{|z-z_0|}{r} < 1$), segue-se do critério M de Weierstrass que $\sum g_n(w)$ converge uniformemente, como afirmado! Então $(*)$ pode ser integrado termo a termo, de modo que:

$$(*) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw\right] \cdot (z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{onde } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

Ou seja, $\forall z \in B_r(z_0)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Em particular, f é de classe C^∞ em $B_r(z_0)$ e $(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, por um teorema já demonstrado. Como $r \in \,]0, R[$ foi tomado de forma arbitrária, conclui-se que

$\forall z \in B_R(z_0)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ (portanto esta série tem r.c. $\geq R$), e $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \,. \quad \#$$

Corolário [estimativa de Cauchy]:
Seja f analítica em $B_R(a) \subset \mathbb{C}$. Suponha que, $\forall z \in B_R(a)$, $|f(z)| \leq M$. Então

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\, M}{R^n}$$

Dem.: Seja $r \in \,]0, R[$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

$$\therefore |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{r^{n+1}}\,|dz| \leq$$

$$\leq \frac{n!}{2\cancel{\pi}} \, \frac{M \cdot 2\cancel{\pi} r}{r^{n+1}} = \frac{n!\, M}{r^{n+1}} \xrightarrow{r \to R} \frac{n!\, M}{R^{n+1}}$$

$$\therefore |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\, M}{R^n} \quad \#$$

<u>Def.</u>: Uma função <u>inteira</u> é uma função analítica $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (i.e. cujo domínio é todo o plano complexo).

<u>Teorema</u> [de Liouville]: Seja f uma função inteira limitada. Então f é constante.

<u>Dem.</u>: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é analítica e existe $M > 0$ / $(\forall z \in \mathbb{C})\ |f(z)| \leq M$. Em particular, $\forall R > 0$, segue-se pela estimativa de Cauchy que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ |f^{(n)}(0)| \leq \frac{M n!}{R^n}$$

e, como $\lim_{R \to \infty} \frac{M n!}{R^n} = 0$ se $n \geq 1$, segue-se que $(\forall n \geq 1)\ f^{(n)}(0) = 0$.

Assim, $(\forall z \in \mathbb{C})\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0)$

$\therefore$ f é constante. #

Corolário: <u>Teorema Fundamental da Álgebra</u>
Se $p(z)$ é um polinômio não constante, existe $a \in \mathbb{C}$ / $p(a) = 0$.

<u>Dem.</u>: Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$.
Então
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}: p(z) = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + a_n \right)$$

$\therefore \lim_{z \to \infty} |p(z)| = +\infty$ (*).

Suponha que p não se anule. Então

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto 1/p(z)$$

é uma função inteira. Afirmo que é limitada. Com efeito, por (*) existe $R > 0$ tal que $|p(z)| \geq 1$ se $|z| > R$ $\therefore$ $|f(z)| \leq 1$ se $|z| < R$. Por outro lado, $|f|$ é contínua no compacto $\overline{B}_R(0)$ $\therefore$ limitada aí, digamos, por $M > 0$. Então $|f|$ é limitada por $\max\{M, 1\}$. Pelo teorema de Liouville, f é constante $\therefore$ p é constante, o que contradiz a hipótese. #

— + —

3.) Zeros de uma função analítica / princípio do prolongamento analítico

Teorema: Sejam $U \overset{ab}{\subset} \mathbb{C}$ conexo e $f: U \to \mathbb{C}$ analítica. São equivalentes:

(i) $f \equiv 0$

(ii) $\exists\, a \in U \;/\; (\forall n \in \mathbb{N})\; f^{(n)}(a) = 0$

(iii) $Z_f \doteq \{z \in U \;/\; f(z) = 0\}$ tem um ponto de acumulação em U.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii) e (i) $\Rightarrow$ (iii) são triviais.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Seja $a \in U$ ponto de acumulação de Z_f. Afirmo que $(\forall n \in \mathbb{N})\; f^{(n)}(a) = 0$. Com efeito, suponha que isto não ocorra. Então o conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(a) \neq 0\}$ é não-vazio, logo admite um mínimo $n_0 \in \mathbb{N}$. Assim, a série de Taylor de f em a é dada por:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad , \text{ com } a_{n_0} \neq 0.$$

e, tomando $r > 0 \mid B_r(a) \subset U$, já vimos que o r.c. dessa série é $\geq r$ e sua soma coincide com f em $B_r(a)$. Ou seja, $\forall z \in B_r(a)$:

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z-a)^{n-n_0}$$

Pondo $g : B_r(a) \to \mathbb{C}$
$$z \mapsto \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^{n-n_0} \quad ,$$

tem-se g analítica, $g(a) = a_{n_0} \neq 0$ e $\forall z \in B_r(a)$, $f(z) = (z-a)^{n_0} \cdot g(z)$!

Como g é contínua em a e $g(a) \neq 0$, existe $\rho \in]0, r[$ tal que g não se anula em $B_\rho(a)$, logo $f(z) = (z-a)^{n_0} g(z)$ não se anula em $B_\rho(a) \setminus \{a\}$, o que contradiz o fato de ser $a \in Z_f'$.

(ii) ⇒ (i) Suponha que $\exists\, a \in U \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ f^{(n)}(a) = 0$. Seja $\gamma : [0, \tau] \to U$ uma curva contínua tal que $\gamma(0) = a$. Afirmo que $(\forall n \in \mathbb{N})\ f^{(n)}(\gamma(\tau)) = 0$. Com efeito, seja $X \doteq \{t \in [0, \tau] \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ f^{(n)}(\gamma(t)) = 0\}$. Então $X \neq \emptyset$ (pois $0 \in X$) e é limitado, logo existe $\alpha = \sup X$. Tomando $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em $[0, \alpha[$ tal que $t_n \to \alpha$, como

$(\forall k \in \mathbb{N})$ $f^{(k)} \circ \gamma$ é contínua (pois $f^{(k)}$ e γ são contínuas), tem-se $f^{(k)}(\gamma(t_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} f^{(k)}(\alpha)$, donde $f^{(k)}(\alpha) = 0$ (pois $\underbrace{f^{(k)}(\gamma(t_n)) = \text{cte.}}_{=0}$, uma vez que $(\forall n)$ $t_n < \alpha = \sup X$). Assim, $\alpha \in X$. Se $\alpha < \tau$, podemos tomar uma bola aberta centrada em $\gamma(\alpha)$ e contida em $\mathcal{U}$ na qual f se representa pela série $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{f^{(n)}(\gamma(\alpha))}_{=0} \cdot [z - \gamma(\alpha)]^n$, ou seja, na qual f é identicamente nula, e pela continuidade de γ existiria $\bar{\alpha} \in \,]\alpha, \tau]$ tal que $\gamma([\alpha, \bar{\alpha}])$ estaria contido na referida bola e, portanto, $(\forall n \in \mathbb{N})$ $f^{(n)}(\gamma(\bar{\alpha})) = 0$, contrariando o fato de ser $\alpha = \sup X$. Então $\alpha = \tau$, o que demonstra a afirmação feita.

Como $\mathcal{U}$ é conexo, todo ponto de $\mathcal{U}$ pode ser ligado a a por uma curva contínua, donde, pela afirmação que acabamos de demonstrar, $(\forall p \in \mathcal{U})$ $f^{(n)}(p) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\therefore$ f se anula identicamente em $\mathcal{U}$. #

Corolário 1: Se f e g são analíticas em um aberto conexo $\mathcal{U}$, então $f \equiv g$ se, e somente se, $\{z \in \mathcal{U} \,/\, f(z) = g(z)\}$ tem um ponto de acumulação em $\mathcal{U}$. Dem.: Aplique o teorema para $f - g$.

Corolário 2: Sejam $f: \mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica no aberto conexo $\mathcal{U}$, não identicamente nula, e $a \in \mathcal{U}$ tal que $f(a) = 0$. Então $\exists$ $g: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ analítica t.q. $g(a) \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall z \in \mathcal{U})$ $f(z) = (z-a)^n g(z)$.

Dem.: Como $f : U \to \mathbb{C}$ não é identicamente nula, pelo teo. $\exists m \in \mathbb{N}$ t.q. $f^{(m)}(a) \neq 0$. Seja $n = \min \{ m \in \mathbb{N} / f^{(n)}(a) \neq 0 \}$. Então, tomando-se $r > 0$ / $B_r(a) \subset U$, tem-se $(\forall z \in B_r(a))$

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = (z-a)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n}$$

Defina

$$g : U \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \begin{cases} f(z)/(z-a)^n, & z \in U \setminus \{a\} \\ \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} & z = a \end{cases}$$

Então g é analítica (no aberto $U \setminus \{a\}$ isso é trivial e em $B_r(a)$ g coincide com $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n}$ $\therefore$ também é analítica nessa bola aberta), $g(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0$ e $(\forall z \in U)$ $f(z) = (z-a)^n g(z)$. #

Corolário 3: Os zeros de uma função analítica não identicamente nula num aberto conexo são isolados, ou seja, se $f : U \to \mathbb{C}$ for analítica no aberto conexo U e não identicamente nula, se $\exists a \in U$ / $f(a) = 0$, $\exists r > 0$ tal que f não se anula em $B_r(a) \setminus \{a\}$.