

MAT 220 - Cálculo IV - IF, 2010

Notas de aula - Funções de 1 variável complexa

1.) Ref. complementar:

- Conway, Functions of 1 Complex Variable, Springer

2.) O corpo dos complexos, $\mathbb{C}$

É o $\mathbb{R}^2$, munido das operações:

$$(+): (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad [\text{soma vetorial}]$$

$$(\cdot): (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Exercício: Mostre que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um corpo, i.e. $(+)$, $(\cdot)$ são associativas, comutativas, $(0, 0)$ é elemento neutro p/ $(+)$, $(1, 0)$ é elemento neutro p/ $(\cdot)$, todo elemento admite um inverso aditivo e todo elemento $\neq (0, 0)$ admite um inverso multiplicativo, vale a distributiva de $(\cdot)$ em relação a $(+)$.

Denotaremos este corpo por $\mathbb{C}$. Consideraremos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, identificando o n° real a com o n° complexo $(a, 0)$. Definimos $i = (0, 1)$, de modo que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$$

Nessa nova notação, $(+)$ e $(\cdot)$ se escrevem:

$$(+): (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(\cdot): (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Em particular, $i^2 = -1$, de modo que a equação $x^2 + 1 = 0$ tem raiz em $\mathbb{C}$.

Definições:

Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Definimos:

- (1) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\leadsto$ módulo de z
- (2) $\bar{z} = x - yi$ $\leadsto$ conjugado de z
- (3) $\operatorname{Re} z = x \in \mathbb{R}$ $\leadsto$ parte real de z
- (4) $\operatorname{Im} z = y \in \mathbb{R}$ $\leadsto$ " imaginária de z
- (5) $\theta \in \mathbb{R}$ t.q. $\begin{cases} \operatorname{Re} z = |z| \cos \theta \\ \operatorname{Im} z = |z| \sin \theta \end{cases}$

chama-se argumento de z (notação $\arg z$). Note que θ fica determinado a menos de múltiplos de 2π . Se $-\pi < \theta \leq \pi$, dizemos que θ é o argumento principal de z (notação: $\operatorname{Arg} z$).

Exercício: Verifique as seguintes identidades, $\forall z, w \in \mathbb{C}$:

- (1) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$
- (2) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$
- (3) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (em particular, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tem-se $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$).
- (4) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, $\overline{\bar{z}} = z$.
- (5) $|z \cdot w| = |z| |w|$, $|z/w| = |z|/|w|$, $|z| = |\bar{z}|$.
- (6) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

3.1. Espaços métricos e topologia de $\mathbb{C}$.

Def.: Sejam X um conj. e $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$
 dit- se que d é uma métrica ou distância
 em X (e que (X, d) é um espaço métrico)
 se:

01.) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

02.) $d(x, y) = d(y, x)$

03.) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ [des. triangular]

Exemplos:

1/ $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espaço vetorial real munido de
 um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definimos
 $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \|x - y\|$.

2/ $\mathbb{R}^n$ com a norma euclidiana (é um caso
 particular de (1)) $d(x, y) = \|x - y\|$

3/ $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $d(x, y) = |x - y|$ (é um
 caso particular de (2/)).
 módulo

Num espaço métrico (X, d) , faz sentido definir
 "abertos", "fechados", "bolas", "seqüências convergentes",
 "seq. de Cauchy", "funções contínuas", etc., da
 mesma forma que estas noções foram definidas
 em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:

Definições: Seja (X, d) esp. métrica.

(1) [bola aberta de centro $a \in X$ e raio $r > 0$]

$$B_a(r) = \{x \in X / d(x, a) < r\}$$

(2) [bola fech. de centro $a \in X$ e raio $r > 0$]

$$\overline{B}_a(r) = \{x \in X / d(x, a) \leq r\}$$

(3) [ponto interior de um conjunto; interior de um conj.]

Dados $A \subset X$ e $a \in A$, dit-se que a é pto. interior de A se $\exists r > 0 / B_a(r) \subset A$.

O interior de A é o conjunto

$$\overset{\circ}{A} = \text{int } A = \{x \in A / x \text{ é pto. interior de } A\}$$

(4) [abertos]

$A \subset X$ dit-se aberto se $A = \overset{\circ}{A}$ (i.e. se todos os pto. de A forem pontos interiores)

(5) [ptos. de aderência de um conj.; fecho de um conjunto]

Dados $A \subset X$ e $a \in X$, dit-se que a é pto. de aderência de A se $\forall r > 0, B_a(r) \cap A \neq \emptyset$.

O fecho de A é o conj.

$$\overline{A} = \{a \in X / a \text{ é pto. de aderência de } A\}$$

(6) [fechos]

$A \subset X$ dit-se fechado se $A = \overline{A}$.

(7) [fronteira de um conjunto]

Dados $A \subset X$, $a \in X$, dit-se que a é

um ponto da fronteira de A se $\forall r > 0$,
 $B_a(r) \cap A \neq \emptyset$ e $B_a(r) \cap A^c \neq \emptyset$.

Exercícios : $\begin{cases} A \subset X \text{ é aberto} \Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset. \\ A \subset X \text{ é fechado} \Leftrightarrow \partial A \subset A. \end{cases}$

(8) [ponto de acumulação de um conjunto, limite de uma função]

Sejam $A \subset X$ e $a_0 \in X$. Diz-se que a_0 é ponto de acumulação de A se $\forall r > 0$, $B_a(r) \cap A \setminus \{a_0\} \neq \emptyset$. O conjunto dos pto. de acumulação de A é denotado por A' .

Dados $A \subset X$, $a_0 \in A'$ e $f: A \rightarrow (Y, d)$ [(Y, d) é outro esp. métrico], diz-se que f tem limite $l \in Y$ em a_0 (notação: $\lim_{x \rightarrow a_0} f(x) = l$) se:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in B_{a_0}(\delta) \cap A \text{ e } x \neq a_0 \Rightarrow f(x) \in B_l(\varepsilon) \subset Y$.

(9) [funções contínuas]

Sejam X, Y espaços métricos e $f: X \rightarrow Y$. Dado $x_0 \in X$, diz-se que f é contínua em x_0 se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.

Diz-se que f é contínua se for contínua em todos os pontos de X .

(10) Sequências convergentes / sequências de Cauchy:

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seq. em (X, d) . Diz-se que (x_n) é convergente p/ $a \in X$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t. q. $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(a)$. Notação: $x_n \rightarrow a$.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seq. em (X, d) . Diz-se que (x_n) é de Cauchy se $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

(X, d) diz-se espaço métrico completo se toda seq. de Cauchy for convergente.

4.1 Funções Contínuas de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$.

Como espaço métrico, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ é o mesmo coisa que $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ com efeito, norma euclidiana

$(\forall z, w \in \mathbb{C}) |z - w|$ é a distância euclidiana de z a w . Então as funções contínuas $X \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são as funções contínuas $X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ estudadas na Cálculo II. Exemplos e proposições:

(i) Somas, produtos, quocientes, compostas de funções contínuas $X \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são contínuas.

(ii) $\mathbb{C} \xrightarrow{\text{Re}} \mathbb{R}, \mathbb{C} \xrightarrow{\text{Im}} \mathbb{R}, \mathbb{C} \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}$
 $z \mapsto \text{Re } z, \quad z \mapsto \text{Im } z, \quad z \mapsto |z|$
 são funções contínuas

(iii) $f: X \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua

se e $\text{Re}(f): X \rightarrow \mathbb{R}$

$$z \mapsto \text{Re } f(z)$$

$$\text{e } \text{Im}(f): X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto \text{Im } f(z)$$

o Lema

(iv) Funções polinômiais $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (i.e. da forma
 $z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^k a_n z^n$, dados $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{C}$)
 são contínuas.

Funções racionais (i.e. quocientes de polinômios)
 são contínuas.

5/ Sequências e Séries em $\mathbb{C}$

Sequências convergentes e sequências de Cauchy em $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ já foram definidos na parte (3). Dada $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seq. em $\mathbb{C}$, podemos considerar as sequências em $\mathbb{R}$

$(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ dados por $(\forall n) x_n = \text{Re } z_n$ e $y_n = \text{Im } z_n$,
 de modo que $(\forall n) z_n = x_n + i y_n$.

Prop.: Com as notas acima:

$$(i) \quad z_n \rightarrow z = x + i y \Leftrightarrow x_n \rightarrow x \text{ e } y_n \rightarrow y$$

$$(ii) \quad (z_n)_n \text{ é de Cauchy} \Leftrightarrow (x_n)_n \text{ e } (y_n)_n \text{ o sãem}$$

Dem.: exercício.

Corolário: $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ é espaço métrico completo.

O estudo de sequência em $\mathbb{C}$ se reduz, portanto, ao estudo de sequência em $\mathbb{R}$. Em particular, isto vale para séries:

Def.: Seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seq. em $\mathbb{C}$. A série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é a seq. em $\mathbb{C}$ cujo termo geral é $(\forall n) \quad s_n = \sum_{k=0}^n z_k$.

A uma série $\sum z_n$ em $\mathbb{C}$ podemos associar duas séries $\sum \operatorname{Re} z_n$ e $\sum \operatorname{Im} z_n$ em $\mathbb{R}$, de modo que $\sum z_n < \infty \Leftrightarrow \sum \operatorname{Re} z_n < \infty$ e $\sum \operatorname{Im} z_n < \infty$. Em caso afirmativo, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$.

Prop.: Seja $\sum z_n$ série em $\mathbb{C}$ se $\sum |z_n| < \infty$ (i.e. se $\sum z_n$ for absolutamente convergente), então $\sum z_n < \infty$.

Dem.: Basta aplicar o critério de Cauchy, como já o fizemos p/ séries em $\mathbb{R}$.

5/ Sequências e séries de funções em $\mathbb{C}$.

O estudo de sequências e séries de funções $X \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é totalmente análogo ao de sequências e séries de função $X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aqui segue um resumo das principais definições e teoremas:

Def.: Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seq. de funções $X \rightarrow \mathbb{C}$ e $f: X \rightarrow \mathbb{C}$. Diz-se que:

(1) $f_n \xrightarrow{p} f$ se $(\forall p \in X) f_n(p) \rightarrow f(p)$

(2) $f_n \xrightarrow{u} f$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \forall p \in X: |f_n(p) - f(p)| < \varepsilon$

(3) $(f_n)_n$ satisfaz o critério de Cauchy uniformemente se $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall m, n \geq n_0, \forall p \in X: |f_n(p) - f_m(p)| < \varepsilon$.

Prop.: Com a notação acima:

(1) $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{p} f$

(2) $f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \operatorname{Re} f_n \xrightarrow{u} \operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f_n \xrightarrow{u} \operatorname{Im} f$.

(3) $(f_n)_n$ é uniformemente convergente $\Leftrightarrow (f_n)_n$ satisfaz Cauchy uniformemente

Dem.: (1), (2) são imediatas e (3) se demonstra de forma análoga ao caso de funções $X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema [critério M de Weierstrass]:

Sejam $\sum f_n$ uma série de funções $X \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $\sum a_n$ uma série convergente de n° reais positivos tais que $(\forall p \in X, \forall n \in \mathbb{N}) |f_n(p)| \leq a_n$.
Então $\sum f_n$ converge uniformemente em X e a convergência é absoluta em toda $p \in X$.

Dem.: Análogo ao caso real, usando-se o critério de Cauchy.

Particularmente importantes na Análise de Funções de variável complexa são as séries de funções da forma $\sum a_n (z - z_0)^n$, i.e. as séries de potências.

O seguinte teorema se demonstra de forma totalmente análoga ao caso real:

Teorema [raio de convergência de uma série de potências]: Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ uma série de potências $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (dados $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$).

Defina $R \in [0, +\infty]$ por:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Então:

(1) Se $|z-a| < R$, a série converge absolutamente.

(2) Se $|z-a| > R$, o termo geral da série não converge p/ zero $\therefore$ a série diverge.

(3) Se $0 < r < R$, a série converge uniformemente na bola fechada $\overline{B}_a(r)$. Em particular, a série converge uniformemente em qualquer compacto contido em $B_a(R)$ (pois todo compacto de $B_a(R)$ está contido em alguma bola fechada $\overline{B}_a(r)$ com $0 < r < R$).

R chama-se raio de conv. da série e $B_a(R)$ chama-se disco de convergência da série.

Finalmente, o seguinte teorema sobre inversão de limites se demonstra de forma totalmente análoga ao caso real:

Teorema : Sejam $X \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ ponto de acumulação de X e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seq. de funções $X \rightarrow \mathbb{C}$. Então

$$\lim_{x \rightarrow a} [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)]$$

desde que existam os limites entre $[\cdot]$ e que o primeiro seja uniforme.

Corolário : O limite uniforme de uma sequência de funções contínuas $X \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua $X \rightarrow \mathbb{C}$.

Corolário : Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ uma série de potências $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e R o seu raio de convergência. Então a soma da série é uma função contínua $B_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$.

6/ A aplicação exponencial em $\mathbb{C}$.

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ tem raio de convergência $+\infty$, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n!} = 0$, conforme já vimos.

Def. : $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Assim, $\exp$ é contínua e sua restrição a $\mathbb{R}$ coincide com a exponencial usual $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Estudaremos, a seguir, propriedades de $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Precisaremos do seguinte lema:

Lema: Sejam $\sum a_n$, $\sum b_n$ e $\sum c_n$ séries de n° complexos tais que:

(1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$

(2) $\sum b_n < +\infty$

(3) $\sum |a_n| < +\infty$

Então $\sum c_n < +\infty$, e a convergência é absoluta se $\sum |b_n| < +\infty$. Além disso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Dem.: omitida. Ref.: Rudin. #

Corolário: Sejam $\sum a_n z^n$ e $\sum b_n z^n$ séries de potências c/ r.c. $\geq R$. Então a série produto $\sum c_n z^n$ (onde $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$) tem r.c. $\geq R$, e na soma em $z \in B_0(R)$ é $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$.

Dem.: Com efeito, $\forall z \in B_0(R)$ as séries $\sum a_n z^n$ e $\sum b_n z^n$ convergem absolutamente em z . Então, pelo lema, a série $\sum \left(\sum_{p+q=n} a_p z^p \cdot b_q z^q \right) = \sum c_n z^n$ conv. absolutamente para $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$. Portanto, o raio de conv. de $\sum c_n z^n$ é $\geq R$. #

Corolário : $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

Dem. : Com efeito, como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ convergem absolutamente, segue-se do lema que a série produto converge absolutamente para $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

Mas, a série produto é dada por :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!} \cdot \frac{w^q}{q!} \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} z^p w^q \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \exp(z+w). \quad \# \end{aligned}$$

Corolário : 1/ $\forall z \in \mathbb{C}$, $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

2/ $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$

Dem. : $1/e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$.

2/ Decorre imediatamente de (1). $\#$

As funções $\sin, \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ também são definidas por séries de potências, de forma análoga à exponencial :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

tem ambas raio de conv. infinito (conforme já vimos no caso real).

Def.: $\text{sen}, \cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são definidas, respectivamente, por:

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad \text{sen } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

São, portanto, funções contínuas $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ cujas restrições a $\mathbb{R}$ coincidem com o seno e cosseno usuais. Além disso, $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} \cos(-z) = \cos z \\ \text{sen}(-z) = -\text{sen } z \end{cases}$$

Prop. [fórmula de Euler]:

$$(\forall y \in \mathbb{C}) \quad e^{iy} = \cos y + i \text{sen } y$$

Dem.: Por indução sobre n , verifica-se que

$$i^n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k \\ (-1)^k i & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n y^n}{n!} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Como a série converge absolutamente,} \\ \text{podemos fazer agrupamentos} \end{array} \right. \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{i^{2k} y^{2k}}{(2k)!} + \frac{i^{2k+1} y^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \cos y + i \text{sen } y. \quad \# \end{aligned}$$

Corolário: (2) $\forall y \in \mathbb{R}, \quad |e^{iy}| = 1$
 (1) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
 (3) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z = |z| e^{i \arg z}$

Dem.:

$$(2) \text{ Se } y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sen} y \in \mathbb{R} \text{ e } \cos y \in \mathbb{R} \\ \therefore \operatorname{Re} e^{iy} = \cos y \text{ e } \operatorname{Im} e^{iy} = \operatorname{sen} y \\ \text{onde } |e^{iy}|^2 = \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$$

$$(1) \forall z \in \mathbb{C} :$$

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

$$\bar{e}^{-iz} = \cos(-z) + i \operatorname{sen}(-z) = \cos z - i \operatorname{sen} z$$

$$\therefore 1 = e^{iz} \bar{e}^{-iz} = (\cos z)^2 - (i \operatorname{sen} z)^2 = \\ = \cos^2 z - i^2 \operatorname{sen}^2 z = \\ = \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z$$

$$(3) \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} :$$

$$z = |z| [\cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z] = |z| e^{i \arg z} \quad \#$$

Corolário [fórmula de Moivre]

$$(1) \text{ Se } z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ e } z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \text{ então} \\ z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ \text{e } z_1^{-1} = \frac{1}{r_1} e^{-i\theta_1}$$

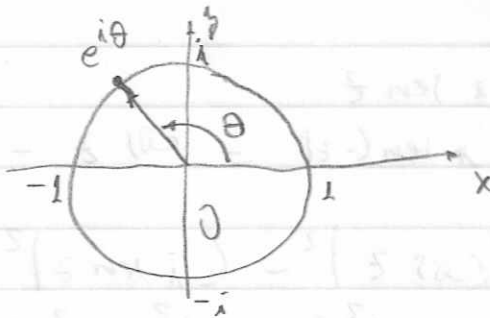
$$\therefore \begin{cases} \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \\ \arg(z_1^{-1}) = -\arg(z_1) \end{cases}$$

$$(2) \text{ Analogamente, } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \arg(z^n) = n \arg(z) \\ (\text{basta fazer indução sobre } n).$$

Em particular, ^{dado} $n \in \mathbb{N}$, as soluções complexas da equação $z^n - 1 = 0$ são dadas por $e^{i \frac{k 2\pi}{n}}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$ [verifique!].

Algumas interpretações geométricas :

1.) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ é o ponto do círculo unitário centrado na origem que forma um ângulo θ com o semi-eixo positivo Ox :



Assim, $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

$$\theta \mapsto e^{i\theta}$$

é uma parametrização do círculo unitário.

2.) Sejam $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\text{Tem-se : } \begin{cases} |ze^{i\theta}| = |z| \overbrace{|e^{i\theta}|}^{=1} = |z| \\ \arg(ze^{i\theta}) = \arg(z) + \theta \end{cases}$$

$\therefore ze^{i\theta}$ é o complexo que se obtém rotacionando z de um ângulo θ no sentido anti-horário :

