

Notas de Aula - Funções de 1 variável complexa, parte II4.1 Singularidades / Séries de Laurent

Def.: Diz-se que uma função f tem uma singularidade isolada em $z=a$ se existir $R>0$ tal que f esteja definida e seja analítica em $B_R(a) \setminus \{a\}$ mas não em $B_R(a)$.

Def.: Seja $z: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Diz-se que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ é absolutamente convergente se ambas as séries $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$ forem absolutamente convergentes. Em caso afirmativo, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Se S for um conjunto e $u: \mathbb{Z} \times S \rightarrow \mathbb{C}$ for tal que $(\forall z \in S) \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(z)$ é absolutamente convergente, diz-se que a convergência é uniforme se ambas as séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}(z)$ forem uniformemente convergentes em S .

Teorema de Laurent: Sejam $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty, a \in \mathbb{C}$ e f analítica na coroa $R_1 < |z-a| < R_2$. Então, existe uma única série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ absolutamente convergente para todo z t.q. $R_1 < |z-a| < R_2$, cuja soma coincide com f . Além disso, a convergência é uniforme em toda coroa $r_1 \leq |z-a| \leq r_2$ se $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, e os coeficientes são dados por:

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad \text{onde}$$

γ é o círculo $|z-a|=r$, percorrido no sentido anti-horário, para qualquer $r \in]R_1, R_2[$.

Dem.: Sejam r_1, r_2 tais que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.
Pelo teorema da integral de Cauchy, tem-se,
para todo z t.q. $r_1 < |z-a| < r_2$:

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{= f_1(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r_1} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{= f_2(z)}$$

$$(i) \forall w \in \partial B_{r_2}(a) : \frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-a) - (z-a)} =$$

$$= \frac{f(w)}{w-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \frac{f(w)}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}, \text{ sendo a convergência uniforme}$$

em $w \in \partial B_{r_2}(a)$ (aplique o teste de Weierstrass!).

$$\text{Assim, } f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \text{ onde}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

$$(ii) \forall w \in \partial B_{r_1}(a) : \frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-a) - (z-a)} =$$

$$= - \frac{f(w)}{z-a} \frac{1}{1 - \frac{w-a}{z-a}} = - \frac{f(w)}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a} \right)^n$$

(3)

$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(w) \cdot (w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$, onde a convergência é uniforme em $w \in \partial B_{r_2}(a)$. Assim,

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}$$

$$\text{onde } (\forall n \geq 1) a_{-n} = - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r_1} f(w) \cdot (w-a)^{n-1} dw$$

$$|z-a|=r_1$$

As integrais $\oint_{|z-a|=r_2} \dots$, em $\mathcal{U}$, e

$\oint_{|z-a|=r_1} \dots$, em $\mathcal{U}$, podem ser substituídas, pelo

teo. da integral de Cauchy, por integrais $\oint_{|z-a|=r} \dots$,

onde $r \in]R_1, R_2[$ qualquer, sem que se altere o a_n 's. Assim:

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \text{ onde}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

A unicidade da série e o fato de a convergência ser absoluta e uniforme em toda coroa fechada $r_1 \leq |z-a| \leq r_2$; com $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, ficam para exercício (para a conv. uniforme, use o critério M de Weierstrass).