

①

MAT 220 - Notas de aula - 02/09

1.) Prova de que $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é analítica:

O polinômio de Taylor de ordem n de $\exp$, centrado no zero, é:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Assim, pela fórmula de Taylor e resto de Lagrange, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existe c entre 0 e x tal que:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^c \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Portanto, dado $M > 0$, conclui-se que, $\forall x \in [-M, M]$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^M \cdot \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ora, a série numérica $\sum \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$ é convergente (aplique o critério da razão), o que implica

$$\frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

$$\text{Logo } (\forall x \in [-M, M]) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Como $M > 0$ foi tomado arbitrariamente,

(2)

segue-se que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Isto significa que a série de McLaurin de $\exp$ tem raio de convergência $+\infty$ e sua soma é $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $\therefore \exp$ é analítica real. $\#$

2.1 A série binomial.

Sejam $r \in \mathbb{R}$ e $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (1+x)^r$

Se $r \in \mathbb{N}$, o teorema do binômio nos diz que:
 $f(x) \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^r \binom{r}{n} x^n$, onde $\binom{r}{n} = \frac{r!}{n!(r-n)!}$.

Queremos generalizar $(*)$ p/ o caso $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Nesse caso, o segundo membro de $(*)$ será substituído por uma série de potências.

Tem-se, $\forall x \in (-1, +\infty)$, $\forall r \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f'(x) = r(1+x)^{r-1}$$

$$f''(x) = r(r-1)(1+x)^{r-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = r(r-1) \cdots (r-n+1)(1+x)^{r-n}$$

$$\text{Definindo } \binom{r}{n} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)}{n!}, & n \geq 1 \end{cases}$$

obtem-se $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{r}{n}$.

$\therefore$ a série de Maclaurin de f é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$$

Se $r \in \mathbb{N}$, esta série é finita. Suponha $r \notin \mathbb{N}$.

Logo $b_n = \binom{r}{n}$, tem-se, p/ $n \geq 1$:

[note que $(\forall n) b_n \neq 0$, pois $r \notin \mathbb{N}$]

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{r(r-n) \cdots (r-n+2)(r-(n+1)+1)}{r(r-n) \cdots (r-n+1)} = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot (r-n) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{|r-n|}{n+1} = \frac{n-r}{n+1} \quad \forall n > r$$

donde $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \rightarrow 1$.

Assim, o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$ é 1 se $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, de modo que seu intervalo de convergência é $(-1, 1)$. Afirma-se que $f|_{(-1,1)}$ é a soma desta série,

ou seja, $\forall x \in (-1, 1), f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$.

A prova desta afirmação será deixada como exercício, seguindo-se o seguinte roteiro:

(i) Seja $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ a soma da referida série. Use o teorema p/ derivação termo a termo p/ concluir que:

$$\forall x \in (-1, 1), \quad g'(x) = \frac{r}{1+x} \cdot g(x)$$

(ii) Agora há dois caminhos possíveis:

(a) Se você já estudou EDO:

Verifique que $f(x) = (1+x)^r$ também é solução de $y' = \frac{r}{1+x} \cdot y$ e $f(0) = 1 = g(0)$,

$\therefore f = g$ pelo teo. de existência e unicidade.

(b) Se você não conhece o teo. de existência e unicidade:

Use o item (i) e a regra de Leibnitz para concluir que $\forall x \in (-1, 1), \quad \frac{d}{dx} [(1+x)^{-r} \cdot g(x)] = 0$.

Portanto, $(1+x)^{-r} g(x) = \text{cte.} = g(0) = 1$, donde $g(x) = (1+x)^r$. $\neq$

3.) Exemplos de aplicação

Exemplo 1: Sejam $c > 0$, $m_0 > 0$ e:

$$m: (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$K: (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto [m(v) - m_0] \cdot c^2$$

Em relatividade especial: c é a velocidade da luz, m_0 a massa de repouso de uma partícula, $m(v)$ a sua massa à velocidade v , $K(v)$ a sua energia cinética.

Vamos expandir $K(v)$ numa série de potências de v , usando-se a série binomial com $r = -1/2$.

Considere $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$$

Sabemos, da parte 2), que:

$$\forall x \in (-1, 1), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n$$

$$\therefore \forall v \in (-c, c): \quad m(v) = m_0 \left\{ 1 + \left[-\left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] \right\}^{-1/2} =$$

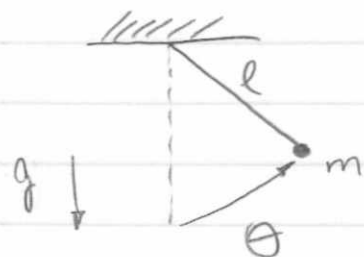
$$= m_0 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n v^{2n}}{c^{2n}} = m_0 + \frac{m_0 v^2}{2c^2} + m_0 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \frac{v^{2n}}{c^{2n}}$$

$$\therefore K(v) = [m(v) - m_0] c^2 =$$

$$= \frac{m_0 v^2}{2} + m_0 c^2 \sum_{n=2}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \frac{v^{2n}}{c^{2n}}$$

onde a série converge absoluta e uniformemente em todo subintervalo compacto de $(-c, c)$. #

Exemplo 2 : Pêndulo Simples



$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$V(\theta) = m g l (1 - \cos \theta)$$

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} [m l^2 \dot{\theta}] + m g l \sin \theta = 0 \quad \#$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Consideremos o problema de Cauchy:

$$(*) \begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \\ \theta(0) = -\theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

(*) tem uma única solução, a qual é periódica e de classe C^∞ . Seja $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a referida solução e T o seu período. Queremos calcular T em função de m, l, g, θ_0 .

$$\theta|_{[0, T/2]} : [0, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$$

é estritamente crescente, $\theta(T/2) = \theta_0$ e $\theta' > 0$ em $]0, T/2[$, $\theta'(0) = \theta'(T/2) = 0$.

Como $\theta : [0, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e estritamente crescente, com imagem $[-\theta_0, \theta_0]$, a referida função é invertível, com inversa

$$\tau : [-\theta_0, \theta_0] \rightarrow \mathbb{R}$$

contínua. Como $\theta' \neq 0$ em $]0, T/2[$ e $\theta'(0) = \theta'(T/2) = 0$, conclui-se que τ é derivável em $(-\theta_0, \theta_0)'$ e não é derivável em $\pm \theta_0$, e $\forall x \in (-\theta_0, \theta_0) :$

$$\tau'(x) = \frac{1}{\theta'(\tau(x))}$$

Tomemos $\delta > 0$ t. q. $\theta_0 - \delta > 0$. Então τ é de classe C^1 em $[-(\theta_0 - \delta), \theta_0 - \delta]$, de modo que, pelo TFC :

$$\tau(\theta_0 - \delta) - \tau(-(\theta_0 - \delta)) = \int_{-(\theta_0 - \delta)}^{\theta_0 - \delta} \tau'(x) dx$$

Como $\tau : [-\theta_0, \theta_0] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, conclui-se que existe $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ dos dois membros acima, de modo que a integral imprópria $\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \tau'$ é convergente e :

$$T/2 = \tau(\theta_0) - \tau(-\theta_0) = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \tau'(x) dx =$$

$$= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\Theta'(\tau(\alpha))} d\alpha \quad \left(= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-(\theta_0-\delta)}^{\theta_0-\delta} \frac{1}{\Theta'(\tau(\alpha))} d\alpha \right).$$

Vamos nos livrar dessa integral imprópria daqui a pouco.

Sabemos que $E = T + V$ é integral primeira de Θ , i.e. é uma função constante ao longo das trajetórias e $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = 0$.

Assim, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\Theta}(t)^2 + m g l [1 - \cos \Theta(t)] = \text{cte.} = m g l [1 - \cos \theta_0],$$

$$\text{donde } \dot{\Theta}(t)^2 = \frac{2}{m l^2} m g l [\cos \Theta(t) - \cos \theta_0] = \frac{2g}{l} [\cos \Theta(t) - \cos \theta_0]$$

Como $(\forall t \in [0, \pi/2]) \dot{\Theta}(t) \geq 0$, obtemos:

$$(\forall t \in [0, \pi/2]) \dot{\Theta}(t) = \sqrt{\frac{2g}{l} [\cos \Theta(t) - \cos \theta_0]}$$

Usando-se a identidade $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, obtemos, $\forall t \in [0, \pi/2]$:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}(t) &= \sqrt{\frac{2g}{l} [(1 - 2 \sin^2 \frac{\Theta(t)}{2}) - (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2})]} = \\ &= 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \left[\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\Theta(t)}{2} \right] \end{aligned}$$

Assim, pondo $k = \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$, obtemos:

$$T_{1/2} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{2 \sqrt{\frac{g}{L}} [k^2 - \sin^2 \frac{\theta(\alpha)}{2}]^{1/2}} d\alpha$$

Como $\theta_0 \equiv \theta(\alpha) = \alpha$, o integrando é uma função par e

$$T = 2 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} d\alpha$$

onde a integral é imprópria (e convergente),

$$\text{i.e.} \int_0^{\theta_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\theta_0 - \delta} \frac{d\alpha}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

Considere :

$$g: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \mapsto 2 \arcsin [k \sin \varphi]$$

de modo que $g \in C^1$, $g(0) = 0$ e $g(\pi/2) = \theta_0$.

Formalmente, vamos fazer a mudança de variáveis $\sin \frac{\alpha}{2} = k \sin \varphi \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \arcsin(k \sin \varphi)$

$$\frac{d\alpha}{2} = \frac{k \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{k \cos \varphi}$$

$$\therefore \int \frac{d\alpha}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \int \frac{2 d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \square$$

Pelo teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann, para todo $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tem-se:

$$(A) \quad \begin{cases} \int_0^{g(c)} \frac{dx}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{x}{2}}} = \int_0^c \frac{g'(\varphi) d\varphi}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{d(g(\varphi))}{2}}} = \\ = \int_0^c \frac{2d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \end{cases}$$

Como $(\forall \varphi \in [0, \pi/2]) |k^2 \sin^2 \varphi| \leq k^2 = \sin^2 \frac{\theta_0}{2} < 1$,
a função $[0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$
 $\varphi \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$

é contínua $\therefore$ Riemann-integrável. Assim, com $\lim_{c \rightarrow \pi/2} g(c) = g(\pi/2) = \theta_0$, pela continuidade

de g , conclui-se de (A), tomando $\lim_{c \rightarrow \pi/2}$:

$$\int_0^{\theta_0} \frac{dx}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{x}{2}}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

e assim no livro-mor da integral imprópria.

Conclusão: $T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$

Ora, já vimos que

$$\forall x \in (-1, 1), (1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n$$

sendo que a série converge absoluta e uniformemente em todo subintervalo compacto de $(-1, 1)$.

$$\text{Como } \forall \varphi \in [0, \pi/2], -1 < \underbrace{-k^2}_{= \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} \leq -k^2 \sin^2 \varphi \leq 0,$$

conclui-se que:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in [0, \pi/2], \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} &= [1 + (-k^2 \sin^2 \varphi)]^{-1/2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n k^{2n} \sin^{2n} \varphi \end{aligned}$$

Pondo $f_n(\varphi) = \binom{-1/2}{n} (-1)^n k^{2n} \sin^{2n} \varphi$, o fato de a série binomial ser uniformemente convergente no intervalo compacto $[-k^2, 0] \subset (-1, 1)$ implica que a série de funções $\sum_n f_n$ é uniformemente convergente em $[0, \pi/2]$.

Portanto, pelo teo. de integração termo a termo, obtém-se:

$$\begin{aligned} T &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n k^{2n} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \end{aligned}$$

$$= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n k^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi d\varphi \quad (4)$$

Por indução sobre n e integrando-se por partes, obtém-se (exercício de Cálculo I):

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \begin{cases} \pi/2, & n=0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \frac{\pi}{2}, & n \geq 1 \end{cases}$$

Substituindo-se a fórmula acima em (4), obtém-se:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2} k^4 + \dots \right)$$

onde $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$

#