

MAT146 - Cálculo I - FEA, Economia - 2012

3ª Lista de Exercícios

I - Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2} dx$ | 2. $\int e^{2x} dx$ | 3. $\int \cos 7x dx$ |
| 4. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ | 5. $\int \frac{7}{x-2} dx$ | 6. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx$ |
| 7. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$ | 8. $\int \operatorname{tg} x dx$ | 9. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$ |
| 10. $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ | 11. $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ | 12. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ |
| 13. $\int x \sqrt{1-x^2} dx$ | 14. $\int \sec x dx$ | 15. $\int \frac{1}{x \sqrt{1+\ln x}} dx$ |
| 16. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+1} dx$ | 17. $\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20} dx$ | 18. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ |
| 19. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x) \sqrt{1-x^2}}$ | 20. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ | 21. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x} dx$ |
| 22. $\int e^{x^3} x^2 dx$ | 23. $\int e^x \sqrt[3]{1+e^x} dx$ | 24. $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ |
| 25. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$ | 26. $\int 2x(x+1)^{2006} dx$ | 27. $\int x \operatorname{sen} x dx$ |
| 28. $\int e^x \cos x dx$ | 29. $\int x^r \ln x dx, r \in \mathbb{R}$ | 30. $\int (\ln x)^2 dx$ |
| 31. $\int x e^{-x} dx$ | 32. $\int x \operatorname{arctg} x dx$ | 33. $\int \operatorname{arcsen} x dx$ |
| 34. $\int \sec^3 x dx$ | 35. $\int \cos^2 x dx$ | 36. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx$ |
| 37. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$ | 38. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$ | 39. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$ |
| 40. $\int \frac{1}{2x^2+8x+20} dx$ | 41. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)} dx$ | 42. $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8} dx$ |
| 43. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | 44. $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ | 45. $\int e^{\sqrt{x}} dx$ |
| 46. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ | 47. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$ | 48. $\int \sqrt{x} \ln x dx$ |

$$\begin{array}{lll}
49. \int \sin(\ln x) dx & 50. \int \frac{x}{x^2-4} dx & 51. \int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3} dx \\
52. \int \sqrt{a^2+b^2x^2} dx & 53. \int \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} dx & 54. \int \sqrt{x^2-2x+2} dx \\
55. \int \sqrt{3-2x-x^2} dx & 56. \int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx & 57. \int \cos^3 x dx \\
58. \int \sin^5 x dx & 59. \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx & 60. \int \sin^3\left(\frac{x}{2}\right) \cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx \\
61. \int \frac{1}{\sin^5 x \cos^3 x} dx & 62. \int \sin^4 x dx & 63. \int \sin^2 x \cos^5 x dx \\
64. \int \sin^2 x \cos^4 x dx & 65. \int \cos^6(3x) dx & 66. \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx \\
67. \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx & 68. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx & 69. \int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx \\
& & \text{(Sugestão: Faça } u = \sqrt[6]{x} \text{)} \\
70. \int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2} dx & 71. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx & 72. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}} dx \\
73. \int \frac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)} dx & &
\end{array}$$

II - Aplicações da Integral Definida

- Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $f(x) = x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = -x + 1$, com $-1 \leq x \leq 1$. (Resp.: $\frac{1}{2}$)
- Desenhe a região $A = B \cap C \cap D$ e calcule a área de A , onde
 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 4\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 12 - 3x^2\}$ e
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3x^2 + 12x + 12\}$ (Resp.: $\frac{104}{3}$)
- Desenhe a região do plano delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. Calcule a área desta região. (Resp.: $\frac{27}{4}$)
- Calcule $\int_{-1}^1 x^3 \sin(x^2 + 1) dx$. (Resp.: 0)
- Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h .
- Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n})$. (Resp.: 2)
- Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
(Resp.: $\ln((1 + \sqrt{2}))$)
- Calcule o comprimento da astróide cuja equação é $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (Resp.: $6a$)

9. Dados $a, b > 0$, calcule a área da região do plano cartesiano limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
(Resp.: πab)

10. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2, x^2 + y^2 \leq 5 \text{ e } x > 0\}$

(Resp.: $\pi \left[\int_0^1 (5 - x^2) dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2} dx + \int_2^{\sqrt{5}} (5 - x^2) dx \right] = \dots$)

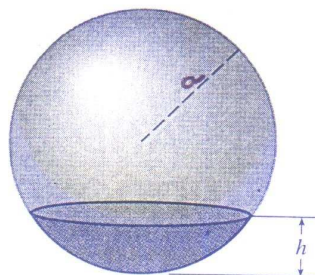
b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ (Resp.: $\frac{\pi}{6}$)

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } e^{-x} \leq y \leq e^x\}$ (Resp.: $\frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})^2$)

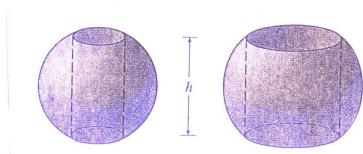
d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 1 \text{ e } 1/x \leq y \leq 4/x^2\}$ (Resp.: $\frac{5\pi}{6}$)

11. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$ ($b > a$) para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume. (**Sugestão:** Note que $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{\pi a^2}{2}$.) (Resp.: $(2\pi b)(\pi a^2)$)

12. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h ($h \leq a$) de uma esfera de raio a . (Resp.: $\pi(a - \frac{h}{3})h^2$)



13. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h , prove o fato notável de que o volume do anel depende de h , mas não de R .



14. Deposita-se dinheiro de maneira contínua em uma caderneta de poupança, a uma taxa de R\$ 5.000,00 por ano. Determine o saldo ao final de um ano, admitindo uma taxa de juros de 10% ao ano, compostos continuamente.

15. Uma pequena companhia faz trabalhos de impressão e executa a maioria de seu trabalho em um único equipamento. Os lucros da firma são influenciados diretamente pela quantidade de material que a prensa pode produzir (assumindo que outros fatores, tais como salários, são mantidos constantes). Podemos dizer que o equipamento está produzindo ganhos contínuos para a companhia. Naturalmente, a eficiência do trabalho pode declinar conforme ele se torna velho. Em um tempo t , seja $K(t)$ a taxa anual de ganho proporcionado pela prensa (i.e. o equipamento estará “produzindo” $K(t)$ reais por ano no tempo t). Assumindo uma taxa de juros r (compostos continuamente), o valor presente $VP(T_1, T_2)$ dos ganhos proporcionados pela prensa entre os tempos T_1 e $T_2 > T_1$ será, então, dado por:

$$VP(T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} K(t)e^{-rt} dt \quad (1)$$

- (a) Assuma uma taxa de juros r de 12% ao ano e $K(t) = 1000 - 10t^2$, $t \geq 0$. Calcule o valor presente do rendimento proporcionado pela prensa no primeiro ano.
- (b) Devido à perda de rendimento pelo envelhecimento, a firma decide trocar a prensa periodicamente (i.e. vende a prensa velha e compra uma nova). Assuma que cada troca tenha um custo fixo cujo valor presente é de 180 reais. Uma prensa nova custa 5000 reais (valor presente), e a prensa velha pode ser vendida a $5000 - 10t$ reais (também valor presente) após t anos de uso. Assuma $K(t) = K_0 - 10t^2$, $t \geq 0$, e $r = 0$ (para facilitar). Calcule o período T em que devem ser feitas as trocas de modo a maximizar o lucro anual médio da firma; para este valor de T , calcule o valor mínimo da taxa de ganho $K_0 = K(0)$ de uma prensa nova para que o negócio seja viável (i.e. para que o lucro anual médio seja positivo).
16. Encontre o valor presente de ganhos contínuos sobre os próximos 5 anos, admitindo uma taxa de juros de 12% ao ano, compostos continuamente, e uma taxa de ganhos de $10e^{-0,08t}$ mil reais por ano no tempo t (em anos).
17. Uma fábrica de pneus para aviões determina que o seu custo marginal com a produção de pneus é $0,12x + 500$ reais quando o nível de produção é de x pneus por dia. Se os custos fixos são de R\$ 1500,00 por dia, encontre o custo total para se produzir x pneus por dia.
18. O *benefício do consumidor* para uma comodidade que tenha uma curva de demanda $p = f(x)$ é dado por:
- $$BC = \int_0^A [f(x) - B] dx,$$
- onde a quantidade demandada é A e o preço é $B = f(A)$.
- Encontre o benefício do consumidor para a curva de demanda $p = \sqrt{25 - 0,04x}$, assumindo um nível de vendas de 400 unidades.
19. R\$ 10.000,00 são depositados em um banco, recebendo 12% de juros ao ano, compostos continuamente. Calcule o valor médio do saldo na conta durante os próximos dez anos.

20. Uma loja vende um certo produto a uma taxa de $g(t)$ unidades por semana no tempo t (tempo em semanas). No tempo $t = 0$, a loja tem Q unidades do produto em estoque.
- Encontre uma fórmula para a quantidade $f(t)$ do produto em estoque no tempo t .
 - Admita que $g(t) = rt$, dado $r > 0$. Calcule r para que o estoque seja esgotado em A semanas.
 - Na situação do item anterior, calcule o estoque médio durante o período $0 \leq t \leq A$.
21. Uma certa companhia produz microscópios para laboratórios. Suponha que a companhia espera vender 1600 microscópios durante um ano, a um fluxo de vendas constante (i.e. vende uma quantidade fixa de microscópios por unidade de tempo). Estes 1600 microscópios serão produzidos em uma certa quantidade de lotes durante o ano, de modo a concluir a produção de cada lote exatamente quando acaba de vender todos os microscópios do lote anterior. A produção de cada lote tem um custo fixo de R\$ 2500. Os custos de seguro são de R\$ 20 por microscópio por ano, cobrados com base no estoque médio anual (i.e. o custo anual total de seguros é igual ao nível médio de microscópios em estoque durante o ano vezes R\$ 20). Os custos de armazenamento são de R\$ 15 por microscópio por ano, cobrados com base no nível de estoque máximo (i.e. o custo anual total de armazenamento é igual ao número máximo de microscópios que ficarão em estoque vezes R\$ 15). A razão de os custos de armazenamento serem cobrados sobre o nível máximo do estoque deve-se ao fato de que será alocado um espaço fixo, correspondente à capacidade máxima do estoque, para armazenar os microscópios (sendo fixo o custo de alocação deste espaço, i.e. independe da quantidade de microscópios em estoque). Dimensione a capacidade máxima do estoque (i.e. o número máximo de microscópios a ser comportado pelo estoque) e determine o número de lotes que devem ser produzidos de modo a minimizar as despesas totais da companhia. Justifique.

III - Integrais Impróprias

DEFINIÇÃO 1 (INTEGRAIS IMPRÓPRIAS) *Sejam $a > 0$ e $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, b]$, para todo $b > a$. Se existir o limite:*

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = L \in \mathbb{R},$$

dizemos que a integral imprópria $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é convergente e é igual a L , i.e.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = L.$$

Analogamente, dada $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[b, a]$ para todo $b < a$, definimos a integral imprópria:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx,$$

caso o limite exista (e neste caso diz-se que a integral imprópria é convergente).

Finalmente, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em todo intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$, definimos a integral imprópria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

caso ambas as integrais impróprias do segundo membro sejam convergentes.

1. Calcule as seguintes integrais impróprias (caso sejam convergentes):

- (a) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$
- (b) $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$, dado $k > 0$.
- (c) $\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$, dado $k > 0$.
- (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+2)^2} dx$

2. O *custo capitalizado* de um bem é o total do seu custo original e do valor presente de todas as renovações ou substituições futuras. Suponha que uma determinada firma calcule o valor presente de “despesas futuras” utilizando uma taxa de juros anual r , compostos continuamente. Assuma que o custo original do bem seja R\$ 50.000,00, e que as despesas anuais de renovações serão de R\$ 12.000,00, distribuídas uniformemente no transcorrer de cada ano.

- (i) Encontre uma fórmula, envolvendo uma integral imprópria, que forneça o custo capitalizado do bem.
- (ii) Assuma r igual a 12% ao ano. Use a fórmula do item anterior para calcular o custo capitalizado do bem.

3. Seja $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$, $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Mostre que f é crescente e ímpar.
- (b) Mostre que $f(x) \leq f(1) + 1 - \frac{1}{x}$, $\forall x \geq 1$.

Sugestão: Integre $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$ de 1 a x .

- (c) Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe e é um real positivo.
- (d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

IV - Miscelânea

1. *Problema de Buffon*. Num plano são traçadas linhas paralelas equidistantes. Joga-se neste plano uma agulha cujo comprimento é igual à distância entre as linhas. Calcule a probabilidade de que a agulha intercepte uma das linhas. (Resp. $\frac{2}{\pi}$)
2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$ ($L > 0$) (isto é, $f(x + 2L) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$). Seja $n \in \mathbb{Z}$. Prove que:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

3. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis, cujos valores estão em $[a, b]$. Então

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

A fórmula acima é conhecida como **Regra de Leibniz**.

4. Calcule $g'(x)$ onde

(a) $g(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2} dt$

(b) $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin(t^2) dt$

5. Considere a função:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{para todo } x > 0.$$

Prove que para todo $a > 0$ e $x > 0$ vale:

(a) $F'(x) = \frac{1}{x}$

(b) $F(ax) = F(a) + F(x)$

(Observe que poderíamos ter definido a função **logaritmo natural** como sendo essa função F).

6. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt$$

Prove que $y'' + y = f(x)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

7. Calcule o seguinte limite, caso exista:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{\int_0^x e^{-t^2} dt}.$$

(Resp.: 0)

RESPOSTAS DAS INTEGRAIS INDEFINIDAS

1) $\frac{x^6}{6} + x - \frac{1}{x} + k$

2) $\frac{e^{2x}}{2} + k$

3) $\frac{\sin 7x}{7} + k$

4) $\operatorname{tg} x - x + k$

- 5) $7 \ln |x - 2| + k$
- 6) $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + k$
- 7) $2\sqrt{\cos x}(\frac{\cos^2 x}{5} - 1) + k$
- 8) $-\ln |\cos x| + k$
- 9) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + k$
- 10) $\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + k$
- 11) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + k$
- 12) $x - \operatorname{arctg} x + k$
- 13) $-\frac{1}{3} \sqrt{(1 - x^2)^3} + k$
- 14) $\ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + k$
- 15) $2\sqrt{1 + \ln x} + k$
- 16) $\frac{5}{18} \sqrt[5]{(x^3 + 1)^6} + k$
- 17) $\ln(2x^2 + 8x + 20) + k$
- 18) $\frac{2}{3} \sqrt{(\ln x)^3} + k$
- 19) $\ln |\operatorname{arcsen} x| + k$
- 20) $\ln(1 + e^x) + k$
- 21) $-\ln(1 + \cos^2 x) + k$
- 22) $\frac{1}{3} e^{x^3} + k$
- 23) $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1 + e^x)^4} + k$
- 24) $-2 \cos \sqrt{x} + k$
- 25) $e^{\operatorname{arctg} x} + k$
- 26) $2(x + 1)^{2005}(\frac{x + 1}{2006} - \frac{1}{2005}) + k$
- 27) $-x \cos x + \operatorname{sen} x + k$
- 28) $\frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + k$
- 29) $\frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + k$ se $r \neq -1$, $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + k$ se $r = -1$
- 30) $x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + k$
- 31) $(-x - 1)e^{-x} + k$
- 32) $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + k$
- 33) $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + k$
- 34) $\frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + k$
- 35) $\frac{1}{2} (x + \operatorname{sen} x \cos x) + k$
- 36) $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + k$
- 37) $\frac{1}{8} (x - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}) + k$
- 38) $\ln |1 + \operatorname{sen} x| + k$

- 39) $6 \ln |x - 1| - 25 \ln |x - 2| + 22 \ln |x - 3| + k$
- 40) $\frac{\sqrt{6}}{12} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + k$
- 41) $-22 \ln |x - 1| + \frac{12}{x-1} + 25 \ln |x - 2| + k$
- 42) $\frac{x^3}{3} + \frac{35}{12} \ln |x - 2| + \frac{61}{24} \ln \left[1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] + \frac{\sqrt{3}}{12} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$
- 43) $\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + k$
- 44) $\frac{x}{8} (2x^2 - 1) \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{8} \operatorname{arcsen} x + k$
- 45) $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + k$
- 46) $x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + k$
- 47) $\ln |\sqrt{5 - 2x + x^2} + x - 1| + k$
- 48) $\frac{2}{3} x \sqrt{x} (\ln x - \frac{2}{3}) + k$
- 49) $\frac{x}{2} [\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + k$
- 50) $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| + k$
- 51) $2 \ln |x - 1| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$
- 52) $x \sqrt{a^2 + b^2 x^2} + \frac{a^2}{2b} \ln \left[\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{a} \right] + k$
- 53) $\frac{1}{b} \ln \left[\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{a} \right] + k$
- 54) $\frac{x-1}{2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{2} \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}) + k$
- 55) $\left(\frac{x+1}{2}\right) \sqrt{3 - 2x - x^2} + 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{2}\right) + k$
- 56) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) + k$
- 57) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + k$
- 58) $-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + k$
- 59) $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 x} - 2 \ln |\operatorname{sen} x| + k$
- 60) $\frac{1}{4} \cos^8\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos^6\left(\frac{x}{2}\right) + k$
- 61) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + 3 \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{3}{2 \operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4 \operatorname{tg}^4 x} + k$
- 62) $\frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + k$
- 63) $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - 2 \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + k$
- 64) $\frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3(2x)}{48} + k$
- 65) $\frac{5}{16} x + \frac{1}{12} \operatorname{sen}(6x) + \frac{1}{64} \operatorname{sen}(12x) - \frac{\operatorname{sen}^3(6x)}{144} + k$

$$66) -\frac{\cotg^3 x}{3} - \frac{\cotg^5 x}{5} + k$$

$$67) \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - 2\cotg(2x) + k$$

$$68) \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + k$$

$$69) 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x}-1| + k$$

$$70) \frac{1}{64} \left(-\frac{4}{x} + \frac{8-2x}{4+x^2} - 3\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + 4\ln|x| - 2\ln(4+x^2) \right) + k$$

$$71) \frac{-\operatorname{arctg} x}{x} + \ln|x| - \ln\sqrt{1+x^2} + k$$

$$72) \frac{3}{2} \operatorname{arcsen}(x-1) - \left(\frac{x+3}{2} \right) \sqrt{2x-x^2} + k$$

$$73) 2\ln|x+1| + \ln(x^2-2x+2) + 3\operatorname{arctg}(x-1) + k.$$