MAT146 - Cálculo I - FEA, Economia - 2012

2^a Lista de Exercícios

1-) Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $\cosh x := \dfrac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big)$

(b) $\operatorname{senh} x := \dfrac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}\big)$

(c) $f(x) = e^{(e^x)}$

(d) $f(x) = x^e + e^x$

(e) $f(x) = e^{1/x^2} + \dfrac{1}{e^{(x^2)}}$

(f) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

(g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$

(h) $f(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$

(i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

(j) $f(x) = 2^{(x^2)} + 3^{2x}$

(k) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$

(l) $f(x) = \big(1 + \cos^2 x\big)^{\operatorname{sen} x}$

(m) $f(x) = (e^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}(x^2)}$

(n) $f(x) = (3 + \cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$

(o) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + e^{\cos x}}$

(p) $f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen} x^5}$

(q) $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$

(r) $f(x) = x^2 e^{\operatorname{arctg} x}$

(s) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}\,(3x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$

(t) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

2-) Sejam $q \in \mathbb{R}$ fixo, com $0 < |q| < 1$, e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a seqüência de números reais dada por $a_n = q^n$. Calcule, caso exista:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n$, onde $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a seqüência de números reais dada por $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ (obs.: esta seqüência chama-se " seqüência das somas parciais " da seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) .

3-) Calcule os limites das seqüências de números reais $(a_n)_n$ dadas por:

(a) $a_n = \dfrac{1+n}{n}$

(b) $a_n = \dfrac{2}{n} + \big(\dfrac{3}{5}\big)^n$

(c) $a_n = n^2 + 3$

(d) $a_n = \dfrac{1}{n^2+3}$

(e) $a_n = \Big(\dfrac{n+2}{n+1}\Big)^n$

4-) Em uma determinada cidade, imóveis valorizam-se a uma taxa de juros de 15% ao ano. Quando um imóvel, adquirido em 2003, irá triplicar de valor:

(a) se os juros são compostos a cada 6 meses ?

(b) se os juros são continuamente compostos ?

5-) Em uma determinada cidade, o valor das propriedades triplicou de 1985 a 2000. Se esta tendência continuar, em que ano o valor das propriedades será cinco vezes o valor de 1985 ? (Utilize um modelo exponencial para o valor da propriedade no instante t).

6-) Uma pessoa deseja planejar uma aposentadoria complementar e investir numa aplicação que rende 25% de juros ao ano. Calcule quanto deve aplicar mensalmente, durante um período de 30 anos, para obter, ao se aposentar, uma renda mensal equivalente ao valor atual de R$ 5.000 (com uma taxa de inflação, digamos, de 15% ao ano):

(a) admitindo que os juros da aplicação sejam compostos mensalmente.

(b) admitindo que os juros da aplicação sejam compostos continuamente.

Faça os mesmos cálculos admitindo que a pessoa em questão deseje se aposentar dentro de 20 anos, ao invés de 30.

7-) Um determinado produto é oferecido por R$ 500, à vista com desconto de 10% ou em 5 parcelas de R$ 100. Qual a melhor opção de compra para um determinado comprador que possa investir o seu dinheiro numa poupança a juros de 12% ao ano, compostos mensalmente ?

8-) Dado $r \in \mathbb{R}$, calcule a derivada da função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^r$.
Obs.: o método usado em aula para o caso em que r é um inteiro não pode ser aplicado; a sugestão é usar o "método do logaritmo", i.e. use a identidade $f(x) = e^{\ln f(x)}$.

9-) Dois corredores iniciam uma corrida ao mesmo tempo e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida eles têm a mesma velocidade.

10-) Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:

(a) $|\text{sen}\, b - \text{sen}\, a| \;\leq\; |b - a|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

(b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \dfrac{1}{2}|a - b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

(c) $\left|\ln \dfrac{a}{b}\right| \leq |a - b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

(d) $b^b - a^a > a^a(b - a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \leq a < b$.

(e) $e^x - e^y \geq x - y$, para todo x, y com $x > y > 0$.

11-) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + 5x - 6$.

(i) Mostre que f é inversível.

(ii) Seja g a função inversa de f. Dado que $f(1) = 0$, verifique que g derivável até segunda ordem no zero e calcule $g''(0)$. Resp.: $g''(0) = -\frac{3}{256}$

12-) Seja $f(x) = x^3 + \ln x$, $x > 0$.

(i) Mostre que f é inversível.

(ii) Seja g a função inversa de f.Verifique que g é derivável e calcule $g'(y)$ em termos de $g(y)$. Dado que $f(1) = 1$, calcule $g'(1)$. Resp.: $g'(1) = 1/4$

13-) Mostre que $f(x) = (1+x)^{1/x}$ é estritamente decrescente para $x > 0$ e conclua que $(1+\pi)^e < (1+e)^\pi$.

14-) Prove as seguintes desigualdades:

(a) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}, \quad \forall x > 1$

(b) $e^\pi > \pi^e$

(c) $\dfrac{tg\ b}{tg\ a} > \dfrac{b}{a}$ sempre que $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$

(d) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \text{ sen } x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}, \quad \forall\, x > 0$

(e) $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{1}{2}x$ se $x > 0$

(f) $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$, $\forall\, x > 0$

15-) Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que p é ponto de máximo local de g. Prove que $pf'(p) - f(p) = 0$. Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p passa pela origem.

16-) Mostre que a equação $3x - 2 + \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

17-) Seja $n \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{nx-1}{nx+1}\right)^x = 4$. Determine n. Resp.: $-1/\ln 2$

18-) Calcule, caso exista

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1-2x)}{\text{tg } \pi x}$ Resp.: 0

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$ Resp.: 0

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\text{cotg } x}$ Resp.: 0

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$ Resp.: 0

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{e^{x^2}}$ Resp.: 0

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x,\ p > 0$ Resp.: 0

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \text{ sen}\left(\frac{p}{x}\right)$ Resp.: p

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right)$ Resp.: 1/6

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1}\right]$ Resp.: 1

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (x \text{ sen } x)^{\text{tg } x}$ Resp.: 1

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (e^x + 3x)^{1/x}$ Resp.: e^4

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\text{tg}(x^2)}$ Resp.: 1

(m) $\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{x} + \ln x\right]$ Resp.: $+\infty$

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$ Resp.: $2/3$

(o) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \text{ arctg } x}$ Resp.: 1

(p) $\lim_{x\to 0} (1 + \text{sen}\, 2x)^{\frac{1}{\text{sen}\, x}}$ Resp.: e^2

(q) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x \,\text{sen}\, x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}\right)$ Resp.: 3

(r) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (\text{tg}\, x \sec x - \sec^2 x)$ Resp.: $\frac{-1}{2}$

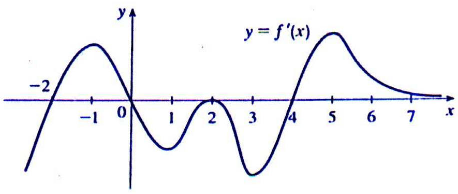
(s) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}}$ Resp.: 0

(t) $\lim_{x\to +\infty} (1+3x)^{1/\ln x}$ Resp.: e

(u) $\lim_{x\to +\infty} \left[\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right]$ Resp.: 1

(v) $\lim_{x\to 0^+} (\text{sen}\, x)^{1/\ln x}$

19-) Seja f uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:



(a) Em que intervalos f é crescente ou decrescente?
(b) Para quais valores de x f tem um máximo ou mínimo local?
(c) Em que intervalos f tem concavidade para cima ou para baixo?
(d) Ache os pontos de inflexão de f.
(e) Assumindo que f seja contínua e que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de f.

20-) Esboce o gráfico das funções abaixo.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$

(b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

(c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

(d) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1}$

(e) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

(f) $f(x) = \left(3 - \frac{6}{x}\right)e^{2/x}$

(g) $f(x) = \sqrt{4x^2+x+1}$

(h) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2}$

(i) $f(x) = e^x - e^{3x}$

(j) $f(x) = x - 3\ln x - \frac{2}{x}$

21-) (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2e^{-x}$.
(b) Determine, em função de k, o número de soluções da equação $ke^x = x^2$.
Resp.: não há soluções se $k < 0$; uma solução se $k = 0$ ou $k > \frac{4}{e^2}$; duas soluções se $k = \frac{4}{e^2}$; três soluções se $0 < k < \frac{4}{e^2}$.

22-) Achar, caso existam, os valores máximo e mínimo de:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,\ x \in [0, \pi]$. Resp.: -1; $\sqrt{2}$.

(b) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3},\ -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$. Resp.: $\sqrt{\frac{17}{8}}$; $\sqrt{3 + \sqrt{\frac{32}{27}}}$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x,\ \dfrac{1}{2} \leq x \leq 4$. Resp.: 4; 1.

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2},\ -1 \leq x \leq 2$. (cuidado!) Resp.: $\sqrt[3]{-3}$; 0.

(e) $f(x) = |x^4 - 2x^3|,\ 0 \leq x \leq 3$. Resp.: 0; 27.

23-) Mostre que a equação $x^3 - 6x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo [-1,1].

24-) Suponha que $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ seja contínua, $f(0) = 1$ e que $f(x)$ é um número racional para todo $x \in [0, 1]$. Prove que $f(x) = 1$, para todo $x \in [0, 1]$.

25-) (Conservação de Energia) Uma partícula de massa m desloca-se sobre o eixo Ox sob ação da força $f(x)$ (i.e. quando a partícula estiver na posição x, a força que atua sobre a mesma é $f(x)$, na direção do eixo Ox e no sentido positivo ou negativo do referido eixo se o sinal de $f(x)$ for positivo ou negativo, respectivamente), onde f é uma função contínua no intervalo J. Seja $\mathrm{V}(x)$ uma função definida em J tal que, para todo $x \in J$, $\mathrm{V}'(x) = -f(x)$ (diz-se que a força f "deriva do potencial V"). Seja $x : I \to J$ a função de horária da partícula, definida no intervalo I (i.e. para cada instante $t \in I$, $x(t) \in J$ é a posição da partícula no referido instante). Assuma que o movimento da partícula seja governado pela lei de Newton:

$$mx''(t) = f\big(x(t)\big).$$

Demonstre que existe uma constante $E \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in I$:

$$\frac{1}{2}\, mx'(t)^2 + \mathrm{V}\big(x(t)\big) = E.$$

26-) Prove que, se p é um polinômio, a equação $e^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções.

Problemas de otimização: máximos e mínimos

1-) Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

Resp.: (5,0) e (-5,0)

2-) (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?
(b) Por que as latas encontradas no mercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado. Resp.: (a) 1; (b) $4/\pi$

3-) Seja $q = f(p)$ uma função de demanda definida no intervalo $[0, a]$, dado $a > 0$. Suponha que f seja não-negativa, estritamente decrescente, duas vezes derivável, e que $f(a) = 0$. Seja $R : [0, a] \to \mathbb{R}$ a função faturamento correspondente, i.e. dada por $R(p) = p\, f(p)$, e suponha $R'' < 0$ em $[0, a]$.

(a) Aplique o teorema do valor intermediário para concluir que R tem um único ponto crítico x_0 em $[0, a]$.

(b) Mostre que o ponto crítico x_0 da função faturamento é um ponto de máximo global e que neste ponto a elasticidade da demanda:

$$E(p) = -\frac{p\, f'(p)}{f(p)}$$

é igual a 1.

(c) Suponha que f seja linear, i.e. da forma $f(p) = B - Ap$, onde A e B são constantes reais tais que valem as hipóteses sobre f feitas no enunciado da questão. Encontre o ponto crítico x_0 da função faturamento para esta função de demanda, em função de A e B.

4-) Suponha que uma firma produza dois produtos A e B, os quais utilizam a mesma matéria-prima. Dada uma quantidade fixa de matéria-prima e uma quantidade fixa de mão-de-obra, a firma decide quanto de seus produtos devem ser alocados na produção de A, e quanto na produção de B. Se x unidades de A e y unidades de B são produzidas, suponha que x e y devam satisfazer:

$$9x^2 + 4y^2 = 18000 \tag{1}$$

O subconjunto do plano cartesiano dado por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0 \text{ e } x, y \text{ soluções de } (1)\}$ é chamado de *curva das possibilidades de produção*. Um ponto desta curva representa uma *estratégia de produção* para a firma, a qual consiste no comprometimento de produzir x unidades de A e y unidades de B. A razão para a relação entre x e y envolve as limitações no número de trabalhadores e de matéria-prima disponível. Suponha que cada unidade de A gere um lucro de R\$ 3, enquanto cada unidade de B gera um lucro de R\$ 4. Encontre a estratégia de produção que maximiza o lucro da firma. Justifique.

5-) Um canhão situado no solo é posto sob um ângulo de inclinação θ. Seja r o alcance do canhão, isto é, a distância entre o canhão e o ponto de impacto da bola. Então r é dado por $r = \dfrac{2v^2}{g} \operatorname{sen} \theta \cos \theta$, onde v e g são contantes. Para que ângulo o alcance é máximo? Resp.: $\theta = \frac{\pi}{4}$

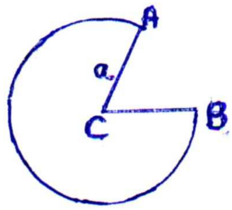
6-) Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.

Resp.: altura: 4; raio: $2\sqrt{2}$.

7-) Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes.
Resp.: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$.

8-) Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro? Resp.: $\left(1 + \sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$.

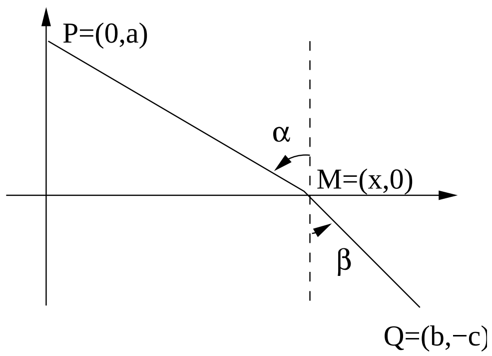
9-) Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB. Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima. Resp.: $\sqrt{2}$



10-) (Lei de Refração de Snellius) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como conseqüência do *princípio de Fermat*, segundo o qual "a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso".

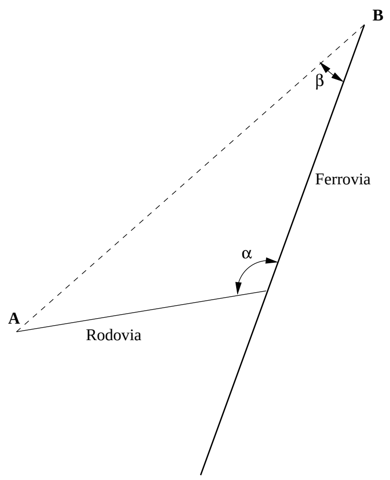
Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos (vide figura abaixo). Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v, também em movimento retilíneo. Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q. Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então:

$$\frac{\sin \alpha}{u} = \frac{\sin \beta}{v}.$$



Observação. A *lei da reflexão plana* também pode ser obtida como conseqüência do mesmo princípio (verifique!).

11-) Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica A a uma ferrovia que passa por uma cidade B. Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam m vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo α a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$. Resp.: $\pi - \arccos(\frac{1}{m})$



12-) Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina? RESP.: $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$

Complementação Teórica

1-) (TEOREMA DE DARBOUX) Sejam f derivável num intervalo I e $a, b \in I$. Prove que, se $d \in \mathbb{R}$ é tal que $f'(a) < d < f'(b)$, então existe c entre a e b tal que $f'(c) = d$. (Atenção: Nada se sabe da continuidade de f'.)

SUGESTÃO. Demonstre primeiro o caso em que $d = 0$.

2-) (FORMA FRACA DA REGRA DE L'HÔPITAL) Sejam f e g funções reais a valores reais deriváveis no ponto $a \in \mathbb{R}$, tais que $g'(a) \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = 0 = g(a) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Demonstre que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

Nos dois exercícios seguintes, tem-se por objetivo demonstrar a regra de l'Hôpital para indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ($1^{\underline{a}}$ regra de l'Hôpital).

3-) (TEOREMA DE CAUCHY) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Demonstre que existe $c \in (a, b)$ tal que $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$.

SUGESTÃO. Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$. Mostre que F satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle e aplique tal teorema.

4-) ($1^{\underline{a}}$ REGRA DE L'HÔPITAL) Sejam f, g funções reais a valores reais, deriváveis em $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ (dados $a \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$), com $g'(x) \neq 0$ neste conjunto. Suponha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Então, se $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir ou for $\pm\infty$, o mesmo ocorrerá para $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, e $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Para demonstrar o teorema acima, complete os detalhes do seguinte roteiro:

(i) Sem perda de generalidade, pode-se assumir $f, g : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$ contínuas, i.e. $f(a) = g(a) = 0$ (por quê?).

(ii) Do item anterior e da hipótese de que $g'(x) \neq 0$ em $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$, segue-se que $g(x) \neq 0$ em $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ (por quê?).

(iii) Use a questão anterior (teorema de Cauchy) para provar que, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x-a| < \delta$, existe $c(x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'\big(c(x)\big)}{g'\big(c(x)\big)}.$$

(iv) Mostre que a função $c : \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\} \to \mathbb{R}$ definida no item anterior é tal que $\lim_{x\to a} c(x) = a$ e que $\lim_{x\to a} \frac{f'\big(c(x)\big)}{g'\big(c(x)\big)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)}$ se o último limite existir ou for $\pm\infty$ (por quê?).

5-) (Fórmula de Taylor de ordem n, com resto de Lagrange) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivável até ordem $(n+1)$ e $x_0, x \in I$. Demonstre que existe c entre x_0 e x (i.e. $x_0 < c < x$ ou $x < c < x_0$) tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1},$$

onde $f^{(0)} = f$.

Sugestão. Suponha $x_0 < x$ (se $x < x_0$, o argumento é análogo). Tome $F : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ definida por $\big(\forall\, y \in [x_0, x]\big)\ F(y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}\,(x-y)^k - A(x-y)^{n+1}$, onde $A \in \mathbb{R}$ é escolhido de forma que $F(x_0) = 0$ (prove que existe tal A). Verifique que F satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle, e aplique tal teorema.

Observação. O teorema acima fornece uma fórmula para o resto da aproximação de f pelo seu *polinômio de Taylor de ordem n centrado em* x_0, i.e. o polinômio na variável x dado por $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$, em termos da derivada $(n+1)$-ésima de f. Assim, se for possível estimar superiormente o módulo de tal derivada em I, o teorema pode ser aplicado para se obter uma estimativa superior do módulo do referido resto, o que é frequentemente útil em cálculos aproximados.