QUESTÃO 1. (a) (1,0 pt) *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 5x}$. *Determine os pontos em que* f *é diferenciável e calcule sua derivada nesses pontos.*

(b) (1,5 pt) *Seja* $g(x) = e^{3x} + 8x - \operatorname{sen}(\pi x)$. *Mostre que* g *tem exatamente uma raiz real.*

(a) (i) $x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\therefore \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pela regra da cadeia f é derivável em x e $f'(x) = \frac{1}{5} \cdot (x^3+5x)^{-4/5} \cdot (3x^2+5)$

(ii) $\forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt[5]{h^3+5h}}{h} =$

$= \sqrt[5]{\dfrac{h^3+5h}{h^5}} = \sqrt[5]{\dfrac{h^2+5}{h^4}}$. Como $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h^4} = +\infty$

e $\lim\limits_{h \to 0} (h^2+5) = 5 > 0$, segue-se $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2+5}{h^4} = +\infty$

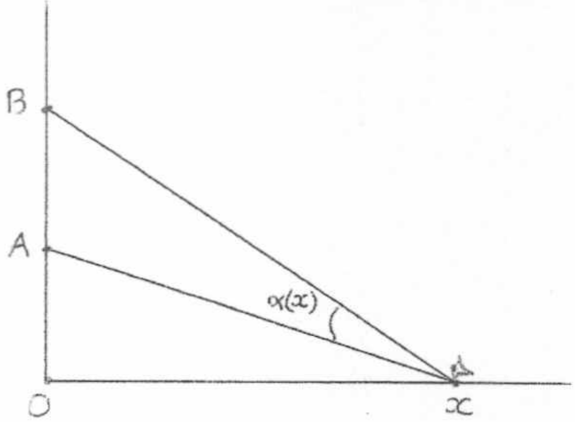
$\therefore \lim\limits_{h \to 0} \sqrt[5]{\dfrac{h^2+5}{h^4}} = +\infty \therefore \nexists \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h}$, i.e. f não é derivável no zero. #

(b) g é derivável e, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \underbrace{3e^{3x}}_{>0} + \underbrace{8 - \pi \cos \pi x}_{\geq 8-\pi>0}$

$\therefore g'(x) > 0 \therefore g$ é estritamente crescente, por um corolário do TVM. Em particular, g é injetiva $\therefore$ tem no máximo uma raiz. Como $g(-1) = e^{-3} - 8 < 0$ e $g(0) = 1 > 0$, segue-se do teorema do valor intermediário que g tem uma raiz entre -1 e 0. #

QUESTÃO **2.** (2,0 pt) *Deseja-se escolher um assento numa sala de cinema de modo a maximizar o ângulo de visão da tela. Admita, conforme indicado na figura, que o observador esteja no ponto no eixo Ox de abscissa x e que a tela esteja no eixo Oy entre os pontos A, de ordenada 2, e B, de ordenada 6; o ângulo de visão é dado por $\alpha(x)$. Calcule, caso exista esse máximo, a que distância x da tela deve se posicionar o observador de modo a maximizar o referido ângulo.*

SUGESTÃO: *O ângulo $\alpha(x)$ é a diferença entre os ângulos OxB e OxA.*



Seja $\alpha : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$x \longmapsto \operatorname{arctg} \frac{6}{x} - \operatorname{arctg} \frac{2}{x}$

O problema se reduz a encontrar, caso exista(m), o(s) pto.(s) de máximo de α; a referida função é ~~[illegible]~~ derivável e, $\forall x \in (0, \infty)$:

$$\alpha'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{6}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{6}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{x^2+2^2} - \frac{6}{x^2+6^2} = \frac{-4(x^2-12)}{(x^2+2^2)(x^2+6^2)}$$

~~[illegible]~~ $\therefore$ sinal de α': $0 \; + \; \sqrt{12} \; -$

$\therefore \boxed{\sqrt{12}}$ é pto. de máximo de α, pelo TVM. #

QUESTÃO **3.** (2,5 pt) *Calcule, caso exista:*

$$\lim_{\substack{\cancel{x\to+\infty} \\ x\to 0}} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(y^2)\mathrm{d}y}{\int_0^x \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y}.$$

As funções

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{F} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(y^2)\,dy \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} (-1,\infty) &\xrightarrow{G} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^{x} \frac{1}{1+y}\,dy \end{aligned}$$

são deriváveis, pelo 2º TFC e pela regra da cadeia, e $F'(x) = \operatorname{sen}(x^4)\cdot 2x$, $G'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

F derivável ⇒ F contínua; idem

Como

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} G(x) = G(0) = 0 \\ \text{e} \\ \lim_{x\to 0} \dfrac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\operatorname{sen}(x^4)}_{\text{limitada}}\cdot \overbrace{2x\cdot(1+x)}^{\to 0} = 0, \end{cases}$$

da regra de l'Hôpital segue-se $\lim_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{G(x)} = 0$. #

QUESTÃO 4. (3,0 pt) *Encontre, caso exista, alguma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que, se $c(t)$ designa o comprimento do gráfico de $f(x)$ para $x \in [0,t]$, então:*

$$c(t) = e^t - 1, \ \forall t \in [0,1].$$

Suponha que exista tal f, de classe C^2. Então, $\forall t \in [0,1]$: $\int_0^t \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = e^t - 1$

Portanto, pelo 2º TFC, $\forall t \in [0,1]$:

$$\sqrt{1+f'(t)^2} = e^t \quad \therefore \quad f'(t) = \sqrt{e^{2t}-1}$$

Tomamos, pois, f primitiva de $\sqrt{e^{2t}-1}$ no intervalo $[0,1]$ (existe, pelo 2º TFC e pelo fato de a referida função ser contínua). Explicitamente,

$$\int \sqrt{e^{2t}-1}\,dt \underset{\substack{u = \sqrt{e^{2t}-1},\ dt = \frac{u\,du}{u^2+1}}}{=} \int \frac{u^2}{u^2+1}\,du = \int \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du =$$

$$= u - \operatorname{arctg} u = \sqrt{e^{2t}-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2t}-1}$$

Ou seja, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$$t \longmapsto \sqrt{e^{2t}-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2t}-1}$$

satisfaz a condição do enunciado. #