QUESTÃO 1. *Calcule:*

(a) (1 pto.) $\lim\limits_{x\to 0^-} (1-2x)^{\operatorname{sen} x}$

(b) (1 pto.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}$

(a) $\forall x < 1/2 : \quad (1-2x)^{\operatorname{sen} x} = \exp[\operatorname{sen} x \cdot \ln(1-2x)]$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}(1-2x) = 1 \\ \ln \text{ contínua}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-2x) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \ln(1-2x) = 0 \\ \exp \text{ contínua}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} (1-2x)^{\operatorname{sen} x} = \exp(0) = \boxed{1}$$

(b) Sejam $\begin{cases} f(x) = x - \operatorname{tg} x \\ g(x) = x - \operatorname{sen} x \end{cases}$. Tem-se:

1) f e g são derivávies, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$

2) $\forall x$, $f'(x) = 1 - \sec^2 x$, $g'(x) = 1 - \cos x$

f' e g' são deriváveis ; $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g'(x)$

3) $\forall x$, $f''(x) = -2\sec x \cdot \sec x \cdot \operatorname{tg} x$, $g''(x) = \operatorname{sen} x$

$\therefore \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = -\dfrac{2}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\operatorname{sen} x}} \quad \therefore \exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = -2$

Aplicando-se a regra de l'Hôpital duas vezes, conclui-se que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \boxed{-2}$

QUESTÃO 2. (3 ptos.) *Esboce o gráfico de* $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$, *determinando explicitamente: os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente, os intervalos nos quais a função tem concavidade para cima ou para baixo, os pontos de inflexão e os limites adequados.*

(i) $\text{dom } f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

(ii) $\forall x \in \text{dom } f$:

$$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x\cdot(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}$$

Sinal de f': $-$ (0) $-$ (1) $-$ (3/2) $+$

Sinal de f'': $+$ (0) $-$ (1) $+$

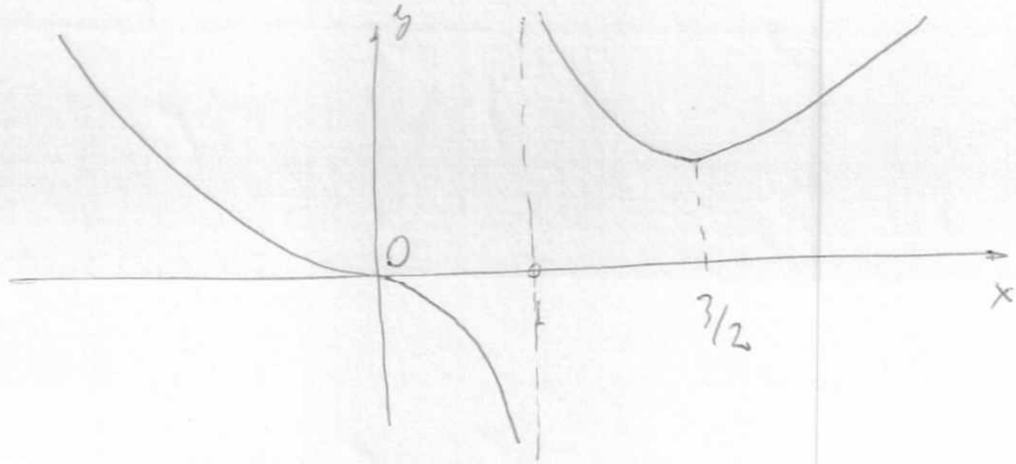
Assim, conclui-se a partir do TVM que:

1.) f é decrescente em $(-\infty, 1)$ e $(1, 3/2]$;
" " crescente " $[3/2, +\infty)$.

2.) f tem concavidade p/ cima em $(-\infty, 0]$ e $(1, +\infty)$;
" " " " baixo em $(0, 1)$

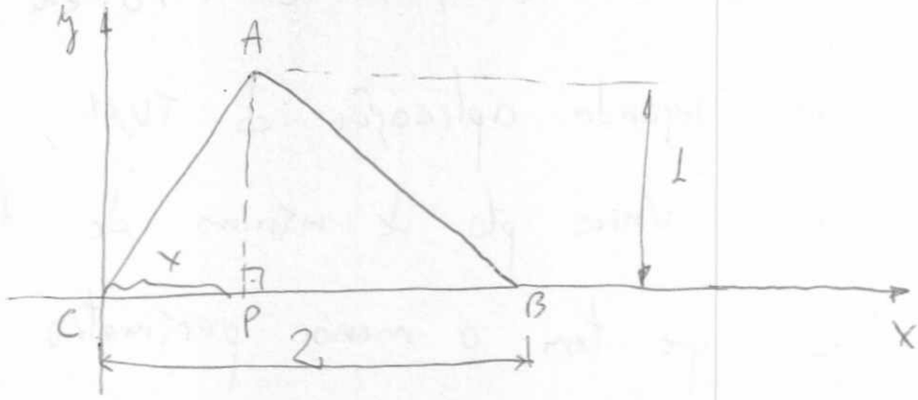
$\therefore$ 0 é pto. de inflexão.

O gráfico de f é conforme esboçado abaixo:



QUESTÃO 3. (2,5 ptos.) *Dentre todos os triângulos de base 2 e altura (relativa à base dada) 1, determine (caso exista) aquele que tem menor perímetro.*

OBSERVAÇÃO. Serão aceitas apenas soluções com base no Cálculo Diferencial.



Considere a figura acima. Tem-se:

$\overline{AC} = \sqrt{1+x^2}$ e $\overline{AB} = \sqrt{1+(2-x)^2}$

O problema se reduz a encontrar, caso exista(m), o(s) pto.(s) de mínimo da função:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(2-x)^2}$$

A referida função é derivável até 2ª ordem e:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{(2-x)}{\sqrt{1+(2-x)^2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(2-x)^2}} - \frac{(2-x)^2}{[1+(2-x)^2]^{3/2}} =$$

$$= \frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{1+\cancel{(2-x)^2}-\cancel{(2-x)^2}}{[1+(2-x)^2]^{3/2}} > 0$$

$\therefore$ f' é estritamente crescente (pelo TVM) e

$f'(x) = 0 \iff x = 1$

$\therefore f' < 0$ em $(-\infty, 1)$ e $f' > 0$ em $(1, +\infty)$.

Por uma segunda aplicação do TVM, conclui-se que 1 é o único pto. de mínimo de f; portanto, o triângulo que tem o menor perímetro é isósceles.

QUESTÃO 4. *Seja* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x + \ln x$.

(a) (1,5 ptos.) *Encontre a imagem de* f *e verifique que* f *é inversível.*

(b) (1 pto.) *Seja* g *a inversa de* f. *Assumindo que* g *seja derivável até segunda ordem, e dado que* $f(1) = 1$, *calcule* $g'(1)$ *e* $g''(1)$.

(a) (i) f é derivável e $(\forall x \in \mathbb{R}^*_+)$ $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$. Do TVM conclui-se que f é estritamente crescente $\therefore$ injetiva.

(ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

Assim, dado $c \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \exists x_1 \in \mathbb{R} \,/\, f(x_1) > c & (\text{pois } \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty) \\ \exists x_2 \in \mathbb{R} \,/\, f(x_2) < c & (\text{e } \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty) \end{cases}$

Sendo f contínua no intervalo $(0, +\infty)$, o teorema do valor intermediário garante que $c \in \operatorname{Im} f$. Assim, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{g(x) + 1}$$

$$\therefore g''(x) = \frac{g'(x) \cdot [g(x) + 1] - g(x) \cdot g'(x)}{[g(x) + 1]^2}$$

Como $f(1) = 1$, segue-se $g(1) = 1$ e:

$$g'(1) = \frac{g(1)}{g(1) + 1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$g''(1) = \frac{g'(1)[g(1) + 1] - g(1) \cdot g'(1)}{[g(1) + 1]^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2}}{2^2} = \boxed{\frac{1}{8}}$$