QUESTÃO 1. (3 ptos.) *Calcule:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{(2x+1)^3(x-5)^4}{(x-3)^3\sqrt{9-x}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+2x} - \sqrt{4x^2+5})$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}^2(x^2-4x+3)}{x-1}$.

(a) $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{(2x+1)^3\cdot(x-5)^4}{\sqrt{9-x}} = \frac{7^3\cdot 2^4}{\sqrt{6}} > 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{(x-3)^3} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{(2x+1)^3(x-5)^4}{(x-3)^3\sqrt{9-x}} = +\infty$

(b) $\forall x > 0$:

$$\sqrt{4x^2+2x} - \sqrt{4x^2+5} = \frac{4x^2+2x-4x^2-5}{\sqrt{4x^2+2x}+\sqrt{4x^2+5}} =$$

$$= \frac{2x-5}{x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}}+\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}\right)} = \frac{2-5/x}{\sqrt{4+\frac{2}{x}}+\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2+5}\right) = \frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2(x^2-4x+3)}{x-1} = \frac{\operatorname{sen}(x^2-4x+3)}{x^2-4x+3}\cdot(x-3)\cdot\operatorname{sen}(x^2-4x+3)$$

Como $\lim_{x \to 1} \dfrac{\text{sen}(x^2-4x+3)}{x^2-4x+3} = 1$

$\lim_{x \to 1} (x-3) = -2$

$\lim_{x \to 1} \text{sen}(x^2-4x+3) = 0$,

segue-se $\lim_{x \to 1} \dfrac{\text{sen}^2(x^2-4x+3)}{x-1} = 0$.

QUESTÃO 2. (2 ptos.) *Verifique se f é contínua e derivável no 0, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por*

(a) $f(x) = |x|^5$.

(b) $f(x) = \begin{cases} |x|\cos(1/x) & \textit{se } x \neq 0; \\ 0 & \textit{se } x = 0. \end{cases}$

(a) $\forall x > 0$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^4 \therefore \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

$\forall x < 0$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -x^4 \therefore \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

$\therefore \exists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, i.e. f é derivável no 0 e $f'(0) = 0$. Logo, f é contínua no 0.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{|x|}_{\to 0} \underbrace{\cos 1/x}_{\text{limitada}} = 0 = f(0)$

$\therefore$ f é contínua no 0.

$\forall x > 0$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \cos 1/x$; logo,

$\nexists \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \therefore f$ não é derivável no 0.

QUESTÃO **3.** (2,5 ptos.) *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de* $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ *em cada ponto onde a tangente for paralela à reta* $2x + y = 2$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = -2 \Leftrightarrow -\frac{2}{(x-1)^2} = -2 \Leftrightarrow x-1 = \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 0$$

$\therefore$ as retas pedidas são as de equações

$$y - (-1) = -2(x-0)$$

e $$y - 3 = -2(x-2).$$

QUESTÃO 4. (2,5 ptos.) *Dois lados de um triângulo medem 4m e 5m. O ângulo entre eles varia a uma taxa de 0,06 rad/s. Encontre a taxa de variação da área desse triângulo no instante em que o ângulo entre os dois lados é $\pi/4$.*

OBSERVAÇÃO. A área de um triângulo em que dois lados medem a e b e o ângulo entre eles mede θ é dada por $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$.

Sendo $\theta(t)$ o ângulo entre os referidos lados, a área do triângulo é dada por:

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\theta \longmapsto \frac{1}{2}4.5.\operatorname{sen}\theta(t)$$

Assumindo-se $\theta(t_0) = \pi/4$ e $\theta'(t_0) = 0,06$, tem-se, pela regra da cadeia:

$$A'(t_0) = \frac{1}{2}4.5.\cos\theta(t_0).\theta'(t_0) =$$

$$= \frac{1}{2}4.5.\cos\pi/4.0,06.$$