

MAT111 - Cálculo I - IO - 2015

3ª Lista de Exercícios

II - Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

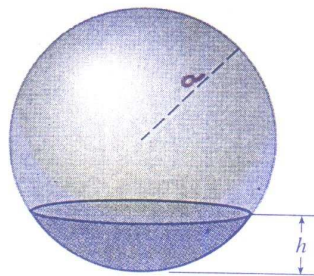
- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2} dx$ | 2. $\int e^{2x} dx$ | 3. $\int \cos 7x dx$ |
| 4. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ | 5. $\int \frac{7}{x-2} dx$ | 6. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx$ |
| 7. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$ | 8. $\int \operatorname{tg} x dx$ | 9. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$ |
| 10. $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ | 11. $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ | 12. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ |
| 13. $\int x \sqrt{1-x^2} dx$ | 14. $\int \sec x dx$ | 15. $\int \frac{1}{x \sqrt{1+\ln x}} dx$ |
| 16. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+1} dx$ | 17. $\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20} dx$ | 18. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ |
| 19. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x) \sqrt{1-x^2}}$ | 20. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ | 21. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x} dx$ |
| 22. $\int e^{x^3} x^2 dx$ | 23. $\int e^x \sqrt[3]{1+e^x} dx$ | 24. $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ |
| 25. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$ | 26. $\int 2x(x+1)^{2006} dx$ | 27. $\int x \operatorname{sen} x dx$ |
| 28. $\int e^x \cos x dx$ | 29. $\int x^r \ln x dx, r \in \mathbb{R}$ | 30. $\int (\ln x)^2 dx$ |
| 31. $\int x e^{-x} dx$ | 32. $\int x \operatorname{arctg} x dx$ | 33. $\int \operatorname{arcsen} x dx$ |
| 34. $\int \sec^3 x dx$ | 35. $\int \cos^2 x dx$ | 36. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx$ |
| 37. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$ | 38. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$ | 39. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$ |
| 40. $\int \frac{1}{2x^2+8x+20} dx$ | 41. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)} dx$ | 42. $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8} dx$ |

43. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 44. $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ 45. $\int e^{\sqrt{x}} dx$
46. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ 47. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$ 48. $\int \sqrt{x} \ln x dx$
49. $\int \operatorname{sen}(\ln x) dx$ 50. $\int \frac{x}{x^2-4} dx$ 51. $\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3} dx$
52. $\int \sqrt{a^2+b^2x^2} dx$ 53. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} dx$ 54. $\int \sqrt{x^2-2x+2} dx$
55. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$ 56. $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$ 57. $\int \cos^3 x dx$
58. $\int \operatorname{sen}^5 x dx$ 59. $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x} dx$ 60. $\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right) \cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx$
61. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^5 x \cos^3 x} dx$ 62. $\int \operatorname{sen}^4 x dx$ 63. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x dx$
64. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x dx$ 65. $\int \cos^6(3x) dx$ 66. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x} dx$
67. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x} dx$

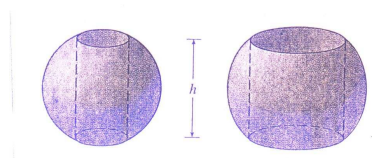
II - Aplicações da Integral Definida

- Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $f(x) = x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = -x + 1$, com $-1 \leq x \leq 1$. (Resp.: $\frac{1}{2}$)
- Desenhe a região $A = B \cap C \cap D$ e calcule a área de A , onde
 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 4\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 12 - 3x^2\}$ e
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3x^2 + 12x + 12\}$ (Resp.: $\frac{104}{3}$)
- Desenhe a região do plano delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. Calcule a área desta região. (Resp.: $\frac{27}{4}$)
- Calcule $\int_{-1}^1 x^3 \operatorname{sen}(x^2 + 1) dx$. (Resp.: 0)
- Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h .
- Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} + \dots + \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$. (Resp.: 2)

7. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
(Resp.: $\ln((1 + \sqrt{2}))$)
8. Calcule o comprimento da astróide cuja equação é $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (Resp.: $6a$)
9. Dados $a, b > 0$, calcule a área da região do plano cartesiano limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
(Resp.: πab)
10. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto
- a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2, x^2 + y^2 \leq 5 \text{ e } x > 0\}$
(Resp.: $\pi \left[\int_0^1 (5 - x^2) dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2} dx + \int_2^{\sqrt{5}} (5 - x^2) dx \right] = \dots$)
- b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ (Resp.: $\frac{\pi}{6}$)
- c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } e^{-x} \leq y \leq e^x\}$ (Resp.: $\frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})^2$)
- d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 1 \text{ e } 1/x \leq y \leq 4/x^2\}$ (Resp.: $\frac{5\pi}{6}$)
11. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$ ($b > a$) para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume. (**Sugestão:** Note que $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{\pi a^2}{2}$.) (Resp.: $(2\pi b)(\pi a^2)$)
12. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h , ($h \leq a$) de uma esfera de raio a . (Resp.: $\pi \left(a - \frac{h}{3} \right) h^2$)



13. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h , prove o fato notável de que o volume do anel depende de h , mas não de R .



III - Miscelânea

1. *Problema de Buffon*. Num plano são traçadas linhas paralelas equidistantes. Joga-se neste plano uma agulha cujo comprimento é igual à distância entre as linhas. Calcule a probabilidade de que a agulha intercepte uma das linhas. Resp. $\frac{2}{\pi}$.
2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$ ($L > 0$) (isto é, $f(x + 2L) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$). Seja $n \in \mathbb{Z}$. Prove que:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

3. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis, cujos valores estão em $[a, b]$. Então

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

A fórmula acima é conhecida como **Regra de Leibniz**.

4. Calcule $g'(x)$ onde

$$(a) \ g(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2} dt$$

$$(b) \ g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin(t^2) dt$$

5. *Trabalho*. Quando uma **força constante** de intensidade F é aplicada na direção do movimento de um objeto e esse objeto é deslocado de uma distância d , definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto por $W = F.d$, se a força age no sentido do movimento e por $W = -F.d$, se ela age no sentido oposto. Suponha agora que um objeto está se movendo na direção positiva ao longo do eixo x , sujeito a uma **força variável** $F(x)$. Defina e encontre uma fórmula para calcular o trabalho W realizado pela força sobre o objeto quando este é deslocado de $x = a$ até $x = b$.

6. *Energia cinética.* Use as notações do exercício anterior, a segunda lei de Newton e a regra da cadeia

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é

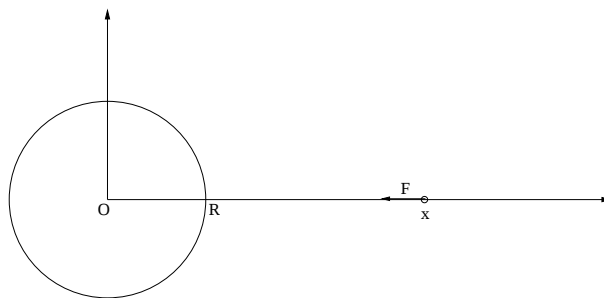
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2 . Em Física, a expressão $\frac{1}{2} m v^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v . Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

7. *Velocidade de Escape.* De acordo com a *lei da gravitação de Newton*, a força com que a Terra atrai uma partícula de massa $m > 0$ é dada por $F(x) = f(x) \vec{i}$, onde $f : [R, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$f(x) = -\frac{G M m}{x^2},$$

sendo $G > 0$ a constante gravitacional universal, $M > 0$ a massa da Terra, $R > 0$ o raio da Terra e $x \in [R, \infty)$ a distância da partícula ao centro da Terra. Admita que a partícula seja lançada com velocidade $v > 0$ da superfície da Terra, e que o seu movimento $x = x(t)$, $t \geq 0$, seja governado pela segunda lei de Newton, i.e. $(\forall t \geq 0) \, m x''(t) = f(x(t))$.



- (a) Suponha que a partícula atinja uma altura máxima $h_{max} > R$ e depois retorne à Terra. Calcule h_{max} em função de v .

Sugestão: Calcule o trabalho realizado por F quando a partícula se desloca de $x = R$ até $x = h_{max}$, e aplique o teorema da energia cinética, levando em conta que para $x = h_{max}$ a velocidade $x'(t)$ da partícula se anula.

- (b) Encontre o maior intervalo $[0, v_e[\subset \mathbb{R}$ no qual é possível definir a função $v \mapsto h_{max}(v)$, sendo h_{max} como no item anterior (i.e. encontre o maior $v_e \in \mathbb{R}$ para o qual faz sentido definir a função no referido intervalo). Verifique que $\lim_{v \rightarrow v_e} h_{max}(v) = +\infty$. (Resp.: $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$)

Observação: v_e chama-se **velocidade de escape** do campo gravitacional terrestre; é a menor velocidade inicial para a qual a partícula não retorna à Terra.

8. Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ e sob ação de uma força $f(x) \vec{i}$, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Admita que a dinâmica da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v , segundo a função $m : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (dados $c > 0$ velocidade da luz e $m_0 > 0$ massa de repouso):

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}},$$

e sua função horária x satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} (m(x'(t))x'(t)) = f(x(t)).$$

Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE , e se $\Delta m = m(x'(t_1)) - m(x'(t_0))$, então:

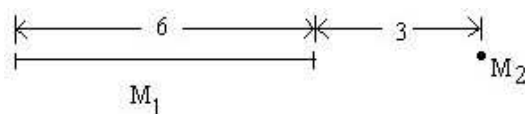
$$\Delta E = \Delta m c^2.$$

Sugestão: Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o teorema fundamental do cálculo.

9. Sabe-se que a intensidade da força de atração entre duas partículas é dada por

$$F = \frac{Cm_1m_2}{d^2}$$

onde C é uma constante, m_1 e m_2 são as massas das partículas e d é a distância entre elas. Uma barra linear homogênea de massa $M_1 = 18kg$ e uma massa pontual $M_2 = 2kg$ estão dispostas como na figura. Calcule a intensidade da força de atração entre as duas massas. (Resp.: $\frac{4}{3}C$)



10. Considere a função:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{para todo } x > 0.$$

Prove que para todo $a > 0$ e $x > 0$ vale:

(a) $F'(x) = \frac{1}{x}$

(b) $F(ax) = F(a) + F(x)$

(Observe que poderíamos ter definido a função **logaritmo natural** como sendo essa função F).

11. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \sin(x-t)f(t)dt$$

Prove que $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

12. Calcule o seguinte limite, caso exista:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2)dt}{\int_0^x e^{-t^2}dt}.$$

(Resp.: 0)

13. Seja $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que f é crescente e ímpar.

(b) Mostre que $f(x) \leq f(1) + 1 - \frac{1}{x}$, $\forall x \geq 1$.

Sugestão: Integre $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$ de 1 a x .

(c) Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe e é um real positivo.

(d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

RESPOSTAS DAS INTEGRAIS INDEFINIDAS

$$1) \frac{x^6}{6} + x - \frac{1}{x} + k$$

$$2) \frac{e^{2x}}{2} + k$$

$$3) \frac{\operatorname{sen} 7x}{7} + k$$

$$4) \operatorname{tg} x - x + k$$

$$5) 7 \ln |x - 2| + k$$

$$6) \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + k$$

$$7) 2\sqrt{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{5} - 1 \right) + k$$

$$8) -\ln |\cos x| + k$$

$$9) \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + k$$

$$10) \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + k$$

$$11) \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + k$$

$$12) x - \operatorname{arctg} x + k$$

$$13) -\frac{1}{3} \sqrt{(1 - x^2)^3} + k$$

$$14) \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + k$$

$$15) 2\sqrt{1 + \ln x} + k$$

$$16) \frac{5}{18} \sqrt[5]{(x^3 + 1)^6} + k$$

$$17) \ln(2x^2 + 8x + 20) + k$$

$$18) \frac{2}{3} \sqrt{(\ln x)^3} + k$$

$$19) \ln |\operatorname{arcsen} x| + k$$

$$20) \ln(1 + e^x) + k$$

$$21) -\ln(1 + \cos^2 x) + k$$

$$22) \frac{1}{3} e^{x^3} + k$$

$$23) \frac{3}{4} \sqrt[3]{(1 + e^x)^4} + k$$

$$24) -2 \cos \sqrt{x} + k$$

$$25) e^{\operatorname{arctg} x} + k$$

$$26) 2(x + 1)^{2005} \left(\frac{x + 1}{2006} - \frac{1}{2005} \right) + k$$

$$27) -x \cos x + \operatorname{sen} x + k$$

$$28) \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + k$$

$$29) \begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + k & \text{se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2} (\ln x)^2 + k & \text{se } r = -1 \end{cases}$$

$$30) x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + k$$

- 31) $(-x-1)e^{-x} + k$
- 32) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + k$
- 33) $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + k$
- 34) $\frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k$
- 35) $\frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + k$
- 36) $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + k$
- 37) $\frac{1}{8}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right) + k$
- 38) $\ln|1 + \operatorname{sen} x| + k$
- 39) $6\ln|x-1| - 25\ln|x-2| + 22\ln|x-3| + k$
- 40) $\frac{\sqrt{6}}{12}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + k$
- 41) $-22\ln|x-1| + \frac{12}{x-1} + 25\ln|x-2| + k$
- 42) $\frac{x^3}{3} + \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{61}{24}\ln\left[1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] + \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$
- 43) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k$
- 44) $\frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8}\operatorname{arcsen} x + k$
- 45) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + k$
- 46) $x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + k$
- 47) $\ln|\sqrt{5-2x+x^2} + x-1| + k$
- 48) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + k$
- 49) $\frac{x}{2}[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + k$
- 50) $\frac{1}{2}\ln|x^2-4| + k$
- 51) $2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$
- 52) $x\sqrt{a^2+b^2x^2} + \frac{a^2}{2b}\ln\left[\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}\right] + k$
- 53) $\frac{1}{b}\ln\left[\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}\right] + k$
- 54) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln(x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}) + k$

$$55) \left(\frac{x+1}{2} \right) \sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsen\left(\frac{x+1}{2}\right) + k$$

$$56) \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) + k$$

$$57) \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + k$$

$$58) -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + k$$

$$59) \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} - 2 \ln |\operatorname{sen} x| + k$$

$$60) \frac{1}{4} \cos^8\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos^6\left(\frac{x}{2}\right) + k$$

$$61) \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + 3 \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x} + k$$

$$62) \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + k$$

$$63) \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - 2 \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + k$$

$$64) \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3(2x)}{48} + k$$

$$65) \frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x) + \frac{1}{64}\operatorname{sen}(12x) - \frac{\operatorname{sen}^3(6x)}{144} + k$$

$$66) -\frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} + k$$

$$67) \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - 2\operatorname{cotg}(2x) + k$$