MAT111 - Cálculo Diferencial e Integral I - IO - 2015

Prof. Gláucio Terra

2^a Lista de Exercícios

1-) Sejam $f(x) = x^3 + 5x - 6$ e g a função inversa de f.

(a) Calcule $g'(x)$ e $g''(x)$ (em função de x e de $g(x)$);

(b) Calcule $g''(0)$. Resp.: $-\frac{3}{256}$

2-) Sejam $y = f(x)$ dada por $f(x) = x^3 + \ln x$, $x > 0$ e $x = g(y)$ sua função inversa. Calcule $g'(y)$ em termos de $g(y)$. Calcule $g'(1)$. Resp.: $g'(1) = 1/4$

3-) Seja $h(x) = 2x + \cos x$.

(a) Calcule $h^{-1}(1)$. Resp.: 0

(b) Determine $(h^{-1})'(1)$. Resp.: $\frac{1}{2}$

4-) Seja $y = f(x)$ tal que $(x, f(x))$ é solução da equação $y^5 + y\,\mathrm{e}^x + 3x\,\mathrm{e}^{y+1} + 2 = 7 \operatorname{sen} x$, para todo x no domínio de f, e seja e g a inversa de f. Supondo que f e g são funções deriváveis, determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa -1. Resp.: $5y = 6x + 6$

5-) Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $\cosh x \doteq \dfrac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big)$

(b) $\operatorname{senh} x \doteq \dfrac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}\big)$

(c) $f(x) = e^{(e^x)}$

(d) $f(x) = x^e + e^x$

(e) $f(x) = e^{1/x^2} + \dfrac{1}{e^{(x^2)}}$

(f) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

(g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$

(h) $f(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$

(i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

(j) $f(x) = 2^{(x^2)} + 3^{2x}$

(k) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$

(l) $f(x) = \big(1 + \cos^2 x\big)^{\operatorname{sen} x}$

(m) $f(x) = (e^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}$

(n) $f(x) = (3 + \cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$

(o) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + e^{\cos x}}$

(p) $f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen} x^5}$

(q) $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$

(r) $f(x) = x^2 e^{\operatorname{arctg} x}$

(s) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}\ (3x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$

(t) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

6-) Calcule, caso exista (SUGESTÃO: use a regra de l'Hôpital):

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ Resp.: -4

(b) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$ Resp.: $\frac{2}{3a}$

(c) $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} \dfrac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg} \pi x}$ Resp.: 0

(d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$ Resp.: 0

(e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$ Resp.: 0

(f) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{2x}}$ Resp.: 0

(g) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{xe^x}{e^{x^2}}$ Resp.: 0

(h) $\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x,\ p>0$ Resp.: 0

(i) $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ Resp.: e^a

(j) $\lim_{x\to 0} (1+ax)^{b/x}$ Resp.: e^{ab}

(k) $\lim_{x\to 0} (e^x+3x)^{1/x}$ Resp.: e^3

(l) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{3x}}$ Resp.: 0

(m) $\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{p}{x}\right)$ Resp.: p

(n) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$ Resp.: 1/6

(o) $\lim_{x\to +\infty} \left[\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right]$ Resp.: 1

(p) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$ Resp.: $\frac{2}{3}$

7-) Dois corredores iniciam uma corrida ao mesmo tempo e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida eles têm a mesma velocidade.

8-) Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:

(a) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \ \leq \ |b-a|, \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$.

(b) $|\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leq \dfrac{1}{2}|a-b|, \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$, com $a\geq 1$ e $b\geq 1$.

(c) $\left|\ln\dfrac{a}{b}\right| \leq |a-b|, \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$, com $a\geq 1$ e $b\geq 1$.

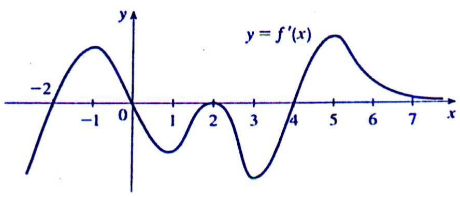
(d) $b^b - a^a > a^a(b-a), \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$ com $1\leq a<b$.

(e) $e^x - e^y \geq x-y$, para todo x,y com $x>y>0$.

9-) Seja f uma função derivável em um intervalo $]a,+\infty[$ e suponha que $a<0$. Mostre que se $f(0)=0$ e $0<f'(x)\leq 1$, para todo $x>0$, então $0<f(x)\leq x,\ \forall x>0$.

10-) Mostre que $f(x)=(1+x)^{1/x}$ é estritamente decrescente para $x>0$ e conclua que $(1+\pi)^e<(1+e)^\pi$.

11-) Seja f uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:



(a) Em que intervalos f é crescente ou decrescente?

(b) Para quais valores de x f tem um máximo ou mínimo local?

(c) Em que intervalos f tem concavidade para cima ou para baixo?

(d) Ache os pontos de inflexão de f.

(e) Assumindo que f seja contínua e que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de f.

12-) Achar, caso existam, os valores máximo e mínimo de:

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $-2 \leq x \leq 3$. Resp.: Max.:$f(-1) = 8$; Min.: $f(2) = -19$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $|x| \leq 5$. Resp.: Max.:$f(1) = 1/2$; Min.: $f(-1) = -1/2$

(c) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$, $0 \leq x \leq 1$. Resp.: Max.:$f(1/2) = 1/4\sqrt{\mathrm{e}}$; Min.: $f(0) = 0$

(d) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$, $x \in [0, \pi]$. Resp.: -1; $\sqrt{2}$.

(e) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3}$, $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$. Resp.: $\sqrt{\frac{17}{8}}$; $\sqrt{3 + \sqrt{\frac{32}{27}}}$.

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 4$. Resp.: 4; 1.

13-) Esboce o gráfico das funções abaixo.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

(e) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$

(f) $f(x) = \big(3 - \dfrac{6}{x}\big)e^{2/x}$

(g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(h) (i) $f(x) = x^2 \ln x$

(j) $f(x) = x^x$

(k) $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2 + 3)$

(l) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

(m) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

14-) (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(b) Determine, em função de k, o número de soluções da equação $ke^x = x^2$.

Resp.: não há soluções se $k < 0$; uma solução se $k = 0$ ou $k > \frac{4}{e^2}$; duas soluções se $k = \frac{4}{e^2}$; três soluções se $0 < k < \frac{4}{e^2}$.

15-) (a) Ache o ponto de mínimo de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ no intervalo $]0, +\infty[$. Resp.: $x_0 = 1$.

(b) Prove que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

16-) Para que números positivos a a curva $y = a^x$ corta a reta $y = x$? Resp.: $a \leq e^{1/e}$.

17-) Mostre que a equação $x^3 - 6x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo [-1,1].

18-) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, e $n \in \mathbb{N}^*$. Prove que $f(x) = x^{2n+1} + ax + b$ tem apenas uma raiz real.

19-) Para que valores de k, a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x = k$ tem três raízes reais distintas ? Resp.: $4 < k < 5$

20-) (Conservação de Energia) Uma partícula de massa m desloca-se sobre o eixo Ox sob ação da força resultante $f(x)$ (ou seja, quando a partícula estiver no ponto de abscissa x, atua sobre ela uma força de intensidade $|f(x)|$, na direção do eixo Ox e com sentido dado pelo sinal de $f(x)$), onde $f : J \to \mathbb{R}$ é contínua no intervalo J. Seja $\mathrm{V}(x)$ uma função derivável definida em J tal que, para todo $x \in J$, $\mathrm{V}'(x) = -f(x)$ (diz-se que a força F "deriva do potencial V"). Seja $x : I \to J$ a função horária da partícula, definida no intervalo I (i.e. para cada instante $t \in I$, $x(t) \in J$ é a posição da partícula no referido instante). Assuma que o movimento da partícula é governado pela lei de Newton:

$$mx''(t) = f\big(x(t)\big).$$

Demonstre que existe uma constante $E \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in I$:

$$\frac{1}{2}mx'(t)^2 + \mathrm{V}\big(x(t)\big) = E.$$

21-) Prove que se p é um polinômio, a equação $e^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções.

Problemas de otimização: máximos e mínimos

1-) Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

Resp.: (5,0) e (-5,0)

2-) Achar os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximos de (0,1). Resp.: $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right)$

3-) Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

4-) Qual é o menor valor da constante a para o qual a desigualdade $ax + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$ é válida para todo número positivo x? Resp.: $a = 2$

5-) Seja $f(x) = 5x^2 + \dfrac{a}{x^5}$, $x > 0$, onde $a > 0$. Ache o menor valor de a de modo que $f(x) \geq 28$, $\forall x > 0$.

Resp.: $a = 2^8$

6-) Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter? Resp.: $\frac{\pi}{4}$

7-) Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é 2/3 da altura do triângulo. Resp.: (a) Deve-se formar apenas um quadrado; (b) o lado do quadrado é $\dfrac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}$.

8-) (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?
(b) Por que as latas encontradas no mercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado. Resp.: (a) 1; (b) $4/\pi$

9-) Um canhão situado no solo é posto sob um ângulo de inclinação θ. Seja r o alcance do canhão, isto é, a distância entre o canhão e o ponto de impacto da bola. Então r é dado por $r = \dfrac{2v^2}{g}\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$, onde v e g são contantes. Para que ângulo o alcance é máximo? Resp.: $\theta = \frac{\pi}{4}$

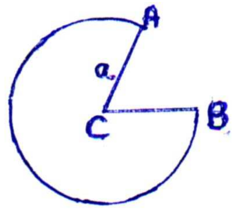
10-) Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.

11-) Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes.

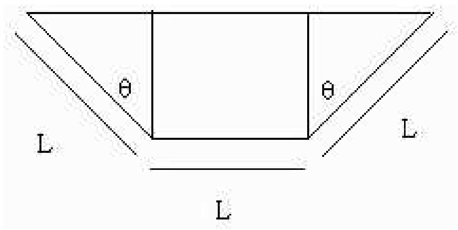
RESP.: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$.

12-) Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro? RESP.: $\left(1+\sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$.

13-) Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB. Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima. RESP.: $\sqrt{2}$

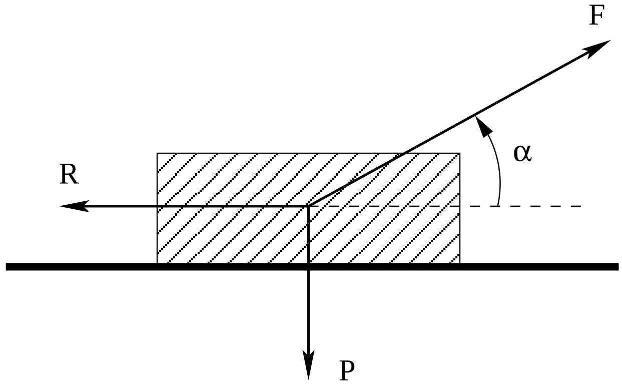


14-) Um reservatório tem fundo horizontal e seção transversal como se mostra na figura. Achar a inclinação dos lados com a vertical de modo a obter a máxima capacidade. RESP.: $\theta = \frac{\pi}{6}$



15-) Um corpo de peso P apoiado sobre um plano horizontal deve ser deslocado horizontalmente pela aplicação de uma força de intensidade F. Qual o ângulo α com a horizontal deve formar a força para que a intensidade da mesma necessária para mover o corpo seja mínima, admitindo coeficiente de atrito $\mu > 0$?

RESP.: $\operatorname{arctg}\mu$

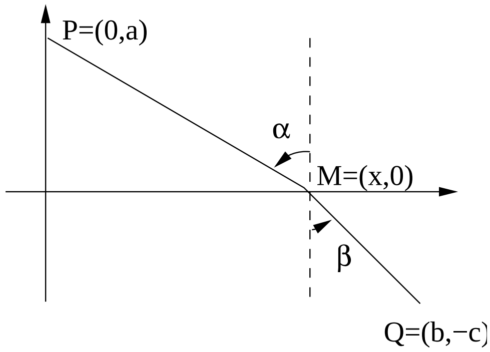


OBSERVAÇÃO. Para cada $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixo, o valor mínimo da força F para movimentar o bloco é tal que a diferença entre a componente horizontal de F e a força de atrito R seja positiva, i.e.
$F\cos\alpha - \mu(P - F\sin\alpha) \geqslant 0$, ou seja, $F \geqslant \frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$.

16-) (Lei de Refração de Snellius) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como conseqüência do *princípio de Fermat*, segundo o qual "a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso".

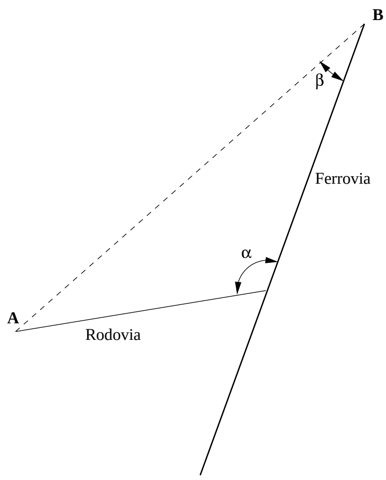
Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos (vide figura 2). Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v, também em movimento retilíneo. Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q. Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então:

$$\frac{\sin\alpha}{u} = \frac{\sin\beta}{v}.$$



Observação. A *lei da reflexão plana* também pode ser obtida como conseqüência do mesmo princípio (verifique!).

17-) Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica A a uma ferrovia que passa por uma cidade B. Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam m vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo α a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$. Resp.: $\pi - \arccos(\frac{1}{m})$



18-) Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina? Resp.: $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$

Complementação Teórica

1-) (TEOREMA DE DARBOUX) Sejam f derivável num intervalo I e $a, b \in I$. Prove que, se $d \in \mathbb{R}$ é tal que $f'(a) < d < f'(b)$, então existe c entre a e b tal que $f'(c) = d$. (Atenção: Nada se sabe da continuidade de f'.)

SUGESTÃO. Demonstre primeiro o caso em que $d = 0$.

2-) (FORMA FRACA DA REGRA DE L'HÔPITAL) Sejam f e g funções reais a valores reais deriváveis no ponto $a \in \mathbb{R}$, tais que $g'(a) \neq 0$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = 0 = g(a) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Demonstre que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

Nos dois exercícios seguintes, tem-se por objetivo demonstrar a regra de l'Hôpital para indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ($1^{\underline{a}}$ regra de l'Hôpital).

3-) (TEOREMA DE CAUCHY) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Demonstre que existe $c \in (a, b)$ tal que $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$.

SUGESTÃO. Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$. Mostre que F satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle e aplique tal teorema.

4-) ($1^{\underline{a}}$ REGRA DE L'HÔPITAL) Sejam f, g funções reais a valores reais, deriváveis em $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ (dados $a \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$), com $g'(x) \neq 0$ neste conjunto. Suponha $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Então, se $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir ou for $\pm\infty$, o mesmo ocorrerá para $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, e $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Para demonstrar o teorema acima, complete os detalhes do seguinte roteiro:

(i) Sem perda de generalidade, pode-se assumir $f, g : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$ contínuas, i.e. $f(a) = g(a) = 0$ (por quê?).

(ii) Do item anterior e da hipótese de que $g'(x) \neq 0$ em $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$, segue-se que $g(x) \neq 0$ em $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ (por quê?).

(iii) Use a questão anterior (teorema de Cauchy) para provar que, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, existe $c(x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'\big(c(x)\big)}{g'\big(c(x)\big)}.$$

(iv) Mostre que a função $c : \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\} \to \mathbb{R}$ definida no item anterior é tal que $\lim\limits_{x \to a} c(x) = a$ e que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'\big(c(x)\big)}{g'\big(c(x)\big)} = \lim\limits_{y \to a} \frac{f'(y)}{g'(y)}$ se o último limite existir ou for $\pm\infty$ (por quê?).

5-) (FÓRMULA DE TAYLOR DE ORDEM N, COM RESTO DE LAGRANGE) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivável até ordem $(n + 1)$ e $x_0, x \in I$. Demonstre que existe c entre x_0 e x (i.e. $x_0 < c < x$ ou $x < c < x_0$) tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

SUGESTÃO. Suponha $x_0 < x$ (se $x < x_0$, o argumento é análogo). Tome $F : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ definida por $\big(\forall\, y \in [x_0, x]\big)\ F(y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x - y)^k - A(x - y)^{n+1}$, onde $A \in \mathbb{R}$ é escolhido de forma que $F(x_0) = 0$ (prove que existe tal A). Verifique que F satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle, e aplique tal teorema.

OBSERVAÇÃO. O teorema acima fornece uma fórmula para o resto da aproximação de f pelo seu polinômio de Taylor de ordem n, em termos da derivada $(n + 1)$-ésima de f. Assim, se for possível estimar superiormente o módulo de tal derivada em I, o teorema pode ser aplicado para se obter uma estimativa superior do módulo do referido resto, o que é freqüentemente útil em cálculos aproximados.