MAT111 - Cálculo Diferencial e Integral I - IO - 2015

Prof. Gláucio Terra

1^a Lista de Exercícios

Limites de Funções

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5}{x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x+9}{x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to -0,02} \dfrac{x}{|x|}$

4) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{-x^2+10x-16}{2x^2-14x-16}$ 5) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ 8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-x^2+7x-3}{2-x+5x^2-4x^3}$ 9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}(3x)\,\operatorname{cossec}(6x)$ 12) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{1-x^3}$

13) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}$ 14) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ 15) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2-x}{(1-x)^3}$

16) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ 17) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}$ 18) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$

19) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1}$ 20) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{7x^6+5x^4+7}}{x^4+2}$ 21) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}}$

22) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+9}+x+3)$ 23) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$

Resp.: 1) $\frac{5}{2}$; 2) 3; 3) -1; 4) $-\frac{1}{3}$; 5) 4; 6) $\frac{1}{5}$; 7) $+\infty$; 8) $-\frac{1}{2}$; 9) 0; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{1}{2}$; 12) 1; 13) $\nexists$; 14) $-\infty$; 15) $-\infty$; 16) -1; 17) $-\frac{1}{2}$; 18) 1; 19) $-\infty$; 20) 0; 21) $+\infty$; 22) 3; 23) $\nexists$.

Continuidade de Funções

1. Determine o conjunto dos pontos em que a função f é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-4), & \text{se } x > 2, \\ x^2+x-6, & \text{se } x < 2, \\ 0, & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Resp.: $\mathbb{R}$.

2. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que a função f é contínua. Justifique.

a) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{se } x \neq 3, \\ 2, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x \neq 3, \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \dfrac{1+(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{2} \operatorname{sen}(\pi x)$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota o *maior inteiro* de x, definido por $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

Resp.: a) $I\!R \setminus \{-2\}$; b) $I\!R \setminus \{3\}$; c) $I\!R \setminus \{3\}$; d) $I\!R \setminus \{1\}$; e) $I\!R$.

3. Determine L para que a função dada seja contínua.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ L, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ L, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Resp.: a) $L = 0$; b) $L = -1$.

4. Considere a função $f : I\!R \to I\!R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 0, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Verifique que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua no ponto $x = 1$? Por que?

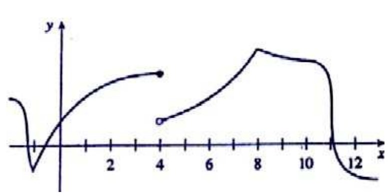
5. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

a) Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função. Se $|f|$ é contínua então f é contínua.

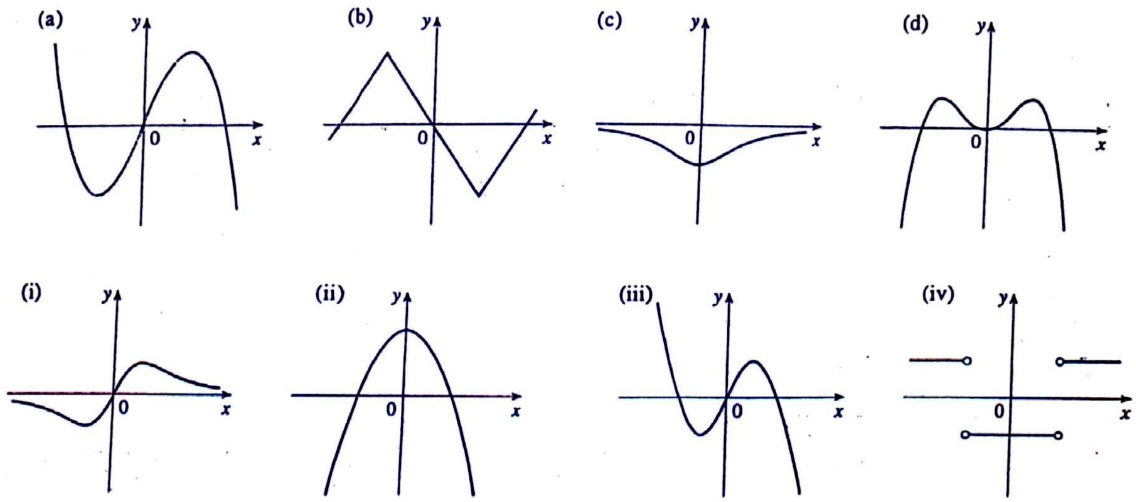
b) Se $f : I\!R \to I\!R$ e $g : I\!R \to I\!R$ são funções descontínuas em $x = 0$ então a função fg é descontínua em $x = 0$.

Derivadas

1. Considere o gráfico de f dado abaixo. Estabeleça, justificando, os pontos onde f não é derivável.



2. Associe os gráficos de cada função de (a) a (d) com os gráficos de suas respectivas derivadas de (i) a (iv).



3. Verifique se f é continua e derivável no ponto x_0, sendo:

a) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)\cos\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0.$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}}, & \text{se } x > 1, \\ 1, & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$ $\qquad x_0 = 1.$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x, & \text{se } x > 0, \\ x^5 + 4x^3, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0.$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{5}x^5, & \text{se } x > 1, \\ x^4, & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$ $\qquad x_0 = 1.$

e) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0.$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0.$

Resp.: *Contínuas:* a) sim; b) não; c) sim; d) não; e) sim; f) sim.
Deriváveis: a) não; b) não; c) não; d) não; e) não; f) sim.

4. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}[(3+x)^2] - \operatorname{tg} 9}{x}$.

Resp: $6 \sec^2 9$

5. Calcule $f'(x)$ para as funções f abaixo:

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 2) $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x+2}$ 3) $f(x) = \dfrac{4x-x^4}{x^3+2}$

4) $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^5} - x^2\right)$ 5) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{(x^4 + \operatorname{tg}^2 x + 1)^2}$ 6) $f(x) = \sqrt{x \operatorname{tg}^2 x}$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \operatorname{cossec} x}{x^3 + 3x^2}$ 8) $f(x) = \sec\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ 9) $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{tg} x}{\sec x}$

10) $f(x) = x \operatorname{sen} x \cos x$ 11) $f(x) = \dfrac{(x+\lambda)^4}{x^4+\lambda^4}$ 12) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)}$

13) $f(x) = \dfrac{2x}{\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}}$ 14) $f(x) = \operatorname{cotg}(3x^2+5)$ 15) $f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x \cos x}$

16) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}\operatorname{sen} x}{x^2\cos(x^2)}$

6. Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função derivável num ponto $a \in [0, +\infty[$. Calcule, em termos de $f'(a)$, o limite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}.$$

7. Analise as seguintes "soluções" para a questão abaixo.

Questão. Considere a função $f(x) = x|x|$. Decida se f é derivável em $x = 0$ e, em caso afirmativo, calcule $f'(0)$. Justifique suas afirmações.

"solução" 1. $f'(0) = 0$, pois $f(0) = 0$.

"solução" 2. Como a função $g(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x = 0$. Logo f não é derivável em $x = 0$.

"solução" 3. Temos $f(x) = h(x)g(x)$, onde $h(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Assim:

$$f'(0) = h'(0)g(0) + h(0)g'(0);$$

como $g(0) = 0$ e $h(0) = 0$ então $f'(0) = 0$.

8. Mostrar que a reta $y = -x$ é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encontre o ponto de tangência.

Resp: $(3, -3)$

9. Achar todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela a reta $16x - y + 5 = 0$.

Resp: $(-1, -13)$, $y = 16x - 3$; $(0, 7)$, $y = 16x + 7$; $(1, 19)$, $y = 16x + 3$.

10. Sejam f e g funções deriváveis em $I\!R$ tais que $f\big(g(x)\big) = x$, para todo $x \in I\!R$. Sabendo que $f'(1) = 2$ e $g(0) = 1$, calcule $g'(0)$. Resp.: $\frac{1}{2}$.

11. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até $2^{\underline{a}}$ ordem e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = xf(x + 1 + \operatorname{sen} 2x)$.

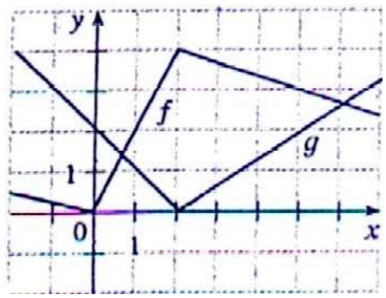
    (a) Calcule $g''(x)$.

    (b) Supondo $f'(1) = -2$, calcule $g''(0)$. Resp.: -12.

12. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ tem como interseção um ponto que está numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

13. Sejam f e g duas funções cujos gráficos estão representados abaixo. Sejam $u(x) = f(x)g(x)$, $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e $w(x) = f(g(x))$. Determine:

    a) $u'(1)$; b) $v'(5)$, c) $w'(3)$.



Taxa de Variação

1. Mostre que a taxa de variação do volume de uma esfera em relação ao seu raio é numericamente igual à área da esfera.

2. Uma mancha de óleo se alastra sempre circularmente. Ache a taxa de variação da área A da superfície da mancha em relação ao raio r do círculo para:

   a) r arbitrário; b) $r = 200$m.

3. A medida do lado de um quadrado varia com o tempo. No instante em que o lado mede $0,5$cm a taxa de variação da área é de $4\text{cm}^2/\text{s}$. Qual a taxa de variação do lado em relação ao tempo neste instante?

   Resp: 4cm/s

4. Num certo instante t_0, a altura de um triângulo cresce à razão de 1cm/min e sua área aumenta à razão de $2\text{cm}^2/\text{min}$. No instante t_0, sabendo que sua altura é 10cm e sua área é 100cm^2, qual a taxa de variação da base do triângulo?

   Resp.: -1,6cm/min.

5. A aresta de um cubo cresce ao longo do tempo. Num certo instante t_0, o seu volume cresce a uma taxa de $10\text{cm}^3/\text{min}$. Sabendo que, neste instante, a aresta do cubo mede 30cm, qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo?

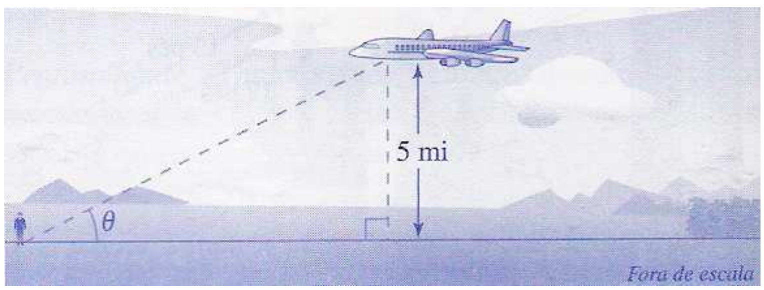
   Resp.: $\frac{4}{3}\,\text{cm}^2/\text{min}$.

6. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual à três vezes a altura. Quando a altura do monte é de $1,2$m, a taxa de variação com que a areia é despejada é de $0,081\text{m}^3/\text{min}$. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante?

   Resp.: $\frac{1}{40\pi}$ m/min.

7. *Ângulo de Elevação* Um avião está voando a uma altitude de 5 milhas em direção a um ponto diretamente sobre um observador no solo (veja figura). A velocidade do avião é de 600 milhas por hora. Calcule a taxa de variação do ângulo de elevação θ quando este ângulo for:

   a) $\theta = 30^o$, b) $\theta = 60^o$, c)$\theta = 75^o$.



   Resp: (a) $\frac{1}{2}$ rad/min; (b) $\frac{3}{2}$ rad/min, (c) 1,87 rad/min.

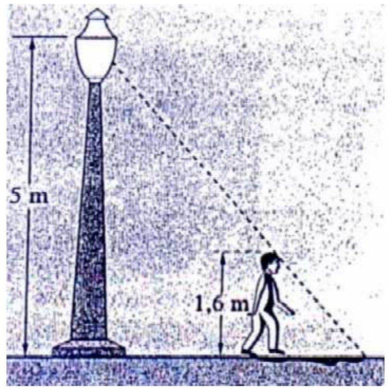
8. Ao meio dia o barco A está 64km a oeste do barco B. O barco A navega para leste a 20km/h e o barco B navega para norte a 25km/h. Qual é a taxa de variação da distância entre os barcos às 13:12h? Resp.: -1km/h.

9. A água flui de uma torneira dentro de um tanque hemisférico de raio 3m e face plana voltada para cima. Seja h a profundidade de água. Quão rapidamente se eleva o nível da água no instante em que $h = 1,5$m, dado que nesse instante a vazão da torneira é de $10,8\text{m}^3/\text{min}$?

   Dica: O volume da calota esférica de altura h e raio (da esfera) r é $\pi r h^2 - \frac{\pi}{3}h^3$.

   Resp: $\frac{8}{5\pi}$m/min

10. Uma luz está no alto de um poste de 5m, como na figura abaixo. Um menino de 1,6m de altura se afasta do poste. Quando ele está a 6m do poste, sua velocidade é de 1,2m/s. A que taxa se move a ponta de sua sombra quando ele está a 6m do poste? A que taxa aumenta o comprimento da sua sombra quando ele está a 6m do poste? Resp.: 1,764m/s; 0,564m/s.



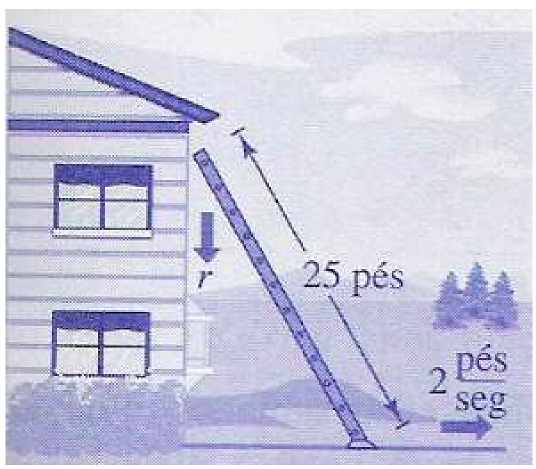
11. *Escada deslizante* Uma escada de 25 pés está encostada na parede de uma casa e sua base está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede (veja figura). Num certo instante, a base da escada se encontra a 7 metros da parede e está sendo empurrada a uma taxa de 2 pés por segundo.

    (a) Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo nesse instante?

    (b) Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a 7 pés da parede.

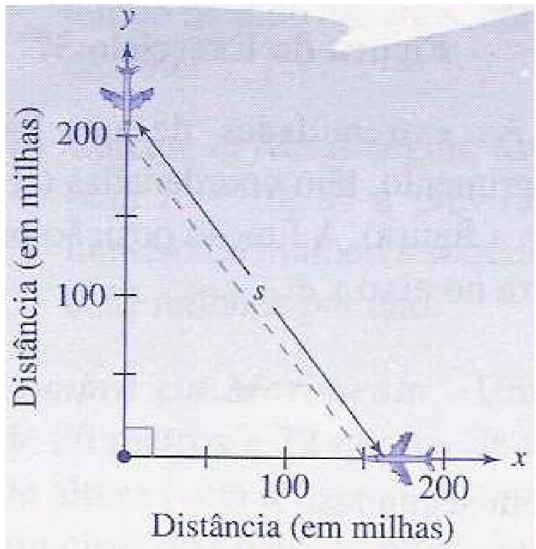
    (c) Calcule a taxa de variação do ângulo formado pela parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a 7 pés da parede.

    Resp: (a) $\frac{7}{12}$pes/s; (b) $\frac{527}{24}$pes^2/s; (c) $\frac{1}{12}$rad/s.



12. *Controle de Tráfego Aéreo* Um controlador de tráfego aéreo percebe que dois aviões, que estão voando na mesma altitude e ao longo de duas retas perpendiculares entre si, irão se chocar no ponto de intersecção destas retas. Num certo instante um dos aviões está a 150 milhas desse ponto e está se deslocando a uma velocidade de 450 milhas por hora. O outro avião está a 200 milhas do ponto e tem uma velocidade de 600 milhas por hora. A que taxa a distância entre os aviões está diminuindo nesse instante?

Resp: 750 mph.



13. *Sombra em movimento* Um saco de areia é solto de um balão a uma altura de 60 metros, no momento em que o ângulo de elevação em relação ao sol é de 30^o (veja figura). Calcule a velocidade com que a sombra do saco de areia se move sobre o solo quando o saco se encontra a uma altura de 35 metros.

    Resp: $-7\sqrt{30}\,\mathrm{m/s}$.