MAT111 - Cálculo I - IME, BMAT & BMAP - 2014

3^a Lista de Exercícios

I - Fórmulas de Taylor

1. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro:

   (a) $\sqrt[3]{8,2}$

   (b) $\ln(1,3)$

   (c) $\text{sen}(0,1)$

2. (a) Encontre o polinômio de Taylor de ordem 2, centrado em $x_0 = 1$, da função $f(x) = x\ln x + x^2$.

   (b) Prove que $|x\ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}| < \frac{(x-1)^3}{6}$ para todo $x > 1$.

3. Dado $n \in I\!N$, encontre o polinômio de Taylor de ordem $2n+1$ de $\text{sen}\, x$, centrado em $x_0 = 0$, e use-o para calcular $\text{sen}\, 1$ com erro inferior a 10^{-5}.

4. (a) Dado $n \in I\!N$, encontre o polinômio de Taylor de ordem n de e^x, centrado em $x_0 = 0$, e use-o para calcular e com erro inferior a 10^{-5}.

   (b) Mostre que, para todo $n \in I\!N$:

$$|e^{x^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}| \leqslant \frac{e^{x^2} x^{2n+2}}{(n+1)!}$$

   (c) Calcule $\int_0^1 e^{x^2} dx$ com erro inferior a 10^{-5}.

II - Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1. $\displaystyle\int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2}\, dx$ 2. $\displaystyle\int e^{2x}\, dx$ 3. $\displaystyle\int \cos\ 7x\ dx$

4. $\displaystyle\int \text{tg}^2\, x\ dx$ 5. $\displaystyle\int \frac{7}{x-2}\, dx$ 6. $\displaystyle\int \text{tg}^3 x\ \sec^2 x\ dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}^3 x}{\sqrt{\cos\ x}}\, dx$ 8. $\displaystyle\int \text{tg}\, x\ dx$ 9. $\displaystyle\int \text{tg}^3 x\ dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

13. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

14. $\displaystyle\int \sec x\ dx$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

16. $\displaystyle\int x^2\sqrt[5]{x^3+1}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\mathrm{arcsen}x)\ \sqrt{1-x^2}}$

20. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

22. $\displaystyle\int e^{x^3}x^2\,dx$

23. $\displaystyle\int e^x\sqrt[3]{1+e^x}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{e^{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}\,dx$

26. $\displaystyle\int 2x(x+1)^{2006}\,dx$

27. $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}x\ dx$

28. $\displaystyle\int e^x\ \cos x\ dx$

29. $\displaystyle\int x^r\ \ln x\ dx, r\in\mathbb{R}$

30. $\displaystyle\int (\ln x)^2\ dx$

31. $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$

32. $\displaystyle\int x\mathrm{arctg}\,x\ dx$

33. $\displaystyle\int \mathrm{arcsen}x\ dx$

34. $\displaystyle\int \sec^3 x\ dx$

35. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

36. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2x\ \cos^3 x\ dx$

37. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2x\ \cos^2 x\ dx$

38. $\displaystyle\int \frac{1-\mathrm{sen}x}{\cos x}\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+8x+20}\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

44. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

45. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

48. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ \ln x\ dx$

49. $\displaystyle\int \mathrm{sen}(\ln x)\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\,dx$

52. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx$

53. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\,dx$

54. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

55. $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

56. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$

57. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

58. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^5x\ dx$

59. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\mathrm{sen}^3x}\,dx$

60. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$

61. $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sen}^5x\ \cos^3 x}\,dx$

62. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^4x\ dx$

63. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2x\ \cos^5 x\,dx$

64. $\int \text{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$

65. $\int \cos^6(3x)\, dx$

66. $\int \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^6 x}\, dx$

67. $\int \dfrac{1}{\text{sen}^2 x \cos^4 x}\, dx$

68. $\int \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} dx$

69. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$
(**Sugestão:** Faça $u = \sqrt[6]{x}$)

70. $\int \dfrac{x+1}{x^2(x^2+4)^2} dx$

71. $\int \dfrac{\text{arctg } x}{x^2} dx$

72. $\int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{2x - x^2}} dx$

73. $\int \dfrac{4x^2 - 3x + 3}{(x^2 - 2x + 2)(x+1)} dx$

II - Aplicações da Integral Definida

1. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $f(x) = x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = -x + 1$, com $-1 \leq x \leq 1$. (Resp.: $\frac{1}{2}$)

2. Desenhe a região $A = B \cap C \cap D$ e calcule a área de A, onde

   $B = \{(x, y) \in I\!R^2 : y \geq x^2 - 4\}$, $C = \{(x, y) \in I\!R^2 : y \leq 12 - 3x^2\}$ e
   $D = \{(x, y) \in I\!R^2 : y \leq 3x^2 + 12x + 12\}$ (Resp.: $\frac{104}{3}$)

3. Desenhe a região do plano delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. Calcule a área desta região. (Resp.: $\frac{27}{4}$)

4. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 \text{sen}(x^2+1) dx$. (Resp.: 0)

5. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h.

6. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\left(\text{sen}\frac{\pi}{n} + \text{sen}\frac{2\pi}{n} + ... + \text{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$. (Resp.: 2)

7. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

   (Resp.: $\ln((1+\sqrt{2}))$)

8. Calcule o comprimento da astróide cuja equação é $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (Resp.: $6a$)

9. Dados $a, b > 0$, calcule a área da região do plano cartesiano limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (Resp.: πab)

10. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

    a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq 5 \text{ e } x > 0\}$

    (Resp.: $\pi \left[\int_0^1 (5 - x^2)dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2}dx + \int_2^{\sqrt{5}} (5 - x^2)dx \right] = ...$)

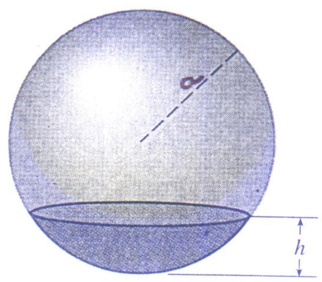
    b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ (Resp.: $\frac{\pi}{6}$)

    c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } e^{-x} \leq y \leq e^x\}$ (Resp.: $\frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})^2$)

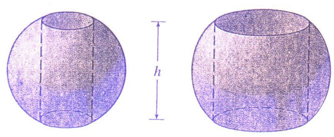
    d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \leq 1 \text{ e } 1/x \leq y \leq 4/x^2\}$ (Resp.: $\frac{5\pi}{6}$)

11. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$ $(b > a)$ para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume. (**Sugestão:** Note que $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}dy = \frac{\pi a^2}{2}$.) (Resp.: $(2\pi b)(\pi a^2)$)

12. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $(h \leq a)$ de uma esfera de raio a. (Resp.: $\pi \left(a - \frac{h}{3} \right) h^2$)



13. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h, prove o fato notável de que o volume do anel depende de h, mas não de R.



III - Miscelânea

1. *Problema de Buffon.* Num plano são traçadas linhas paralelas equidistantes. Joga-se neste plano uma agulha cujo comprimento é igual à distância entre as linhas. Calcule a probabilidade de que a agulha intercepte uma das linhas. Resp. $\frac{2}{\pi}$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período $2L$ ($L > 0$) (isto é, $f(x+2L) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$). Seja $n \in \mathbb{Z}$. Prove que:
$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{1}{L}\int_{a}^{a+2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

3. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a,b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis, cujos valores estão em $[a,b]$. Então
$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$
A fórmula acima é conhecida como **Regra de Leibniz**.

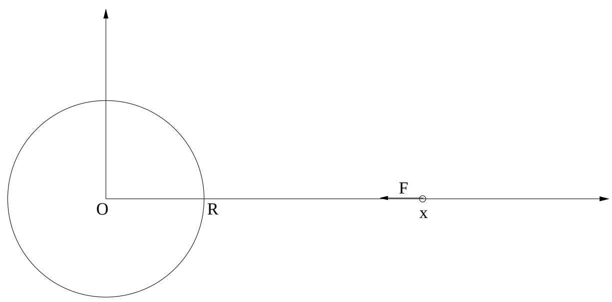
4. Calcule $g'(x)$ onde
(a) $g(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}dt$
(b) $g(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)dt$

5. *Trabalho.* Quando uma **força constante** de intensidade F é aplicada na direção do movimento de um objeto e esse objeto é deslocado de uma distância d, definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto por $W = F.d$, se a força age no sentido do movimento e por $W = -F.d$, se ela age no sentido oposto. Suponha agora que um objeto está se movendo na direção positiva ao longo do eixo x, sujeito a uma **força variável** $F(x)$. Defina e encontre uma fórmula para calcular o trabalho W realizado pela força sobre o objeto quando este é deslocado de $x = a$ até $x = b$.

6. *Energia cinética.* Use as notações do exercício anterior, a segunda lei de Newton e a regra da cadeia
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$
para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2. Em Física, a expressão $\dfrac{1}{2}mv^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v. Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

7. *Velocidade de Escape.* De acordo com a *lei da gravitação de Newton*, a força com que a Terra atrai uma partícula de massa $m > 0$ é dada por $F(x) = f(x)\overrightarrow{i}$, onde $f : [R, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por:
$$f(x) = -\frac{G\,M\,m}{x^2},$$
sendo $G > 0$ a constante gravitacional universal, $M > 0$ a massa da Terra, $R > 0$ o raio da Terra e $x \in [R, \infty)$ a distância da partícula ao centro da Terra. Admita que a partícula seja lançada com velocidade $v > 0$ da superfície da Terra, e que o seu movimento $x = x(t)$, $t \geq 0$, seja governado pela segunda lei de Newton, i.e. $(\forall t \geq 0)\ mx''(t) = f(x(t))$.



(a) Suponha que a partícula atinja uma altura máxima $h_{max} > R$ e depois retorne à Terra. Calcule h_{max} em função de v.

Sugestão: Calcule o trabalho realizado por F quando a partícula se desloca de $x = R$ até $x = h_{max}$, e aplique o teorema da energia cinética, levando em conta que para $x = h_{max}$ a velocidade $x'(t)$ da partícula se anula.

(b) Encontre o maior intervalo $[0, v_e[\subset \mathbb{R}$ no qual é possível definir a função $v \mapsto h_{max}(v)$, sendo h_{max} como no item anterior (i.e. encontre o maior $v_e \in \mathbb{R}$ para o qual faz sentido definir a função no referido intervalo). Verifique que $\lim_{v \to v_e} h_{max}(v) = +\infty$. (Resp.: $v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}$)

Observação: v_e chama-se **velocidade de escape** do campo gravitacional terrestre; é a menor velocidade inicial para a qual a partícula não retorna à Terra.

8. Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ e sob ação de uma força $f(x)\overrightarrow{i}$, dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Admita que a dinâmica

da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v, segundo a função $m : (-c, c) \to \mathbb{R}$ definida por (dados $c > 0$ velocidade da luz e $m_0 > 0$ massa de repouso):

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}},$$

e sua função horária x satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\left(m(x'(t))x'(t)\right) = f(x(t)).$$

Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE, e se $\Delta m = m(x'(t_1)) - m(x'(t_0))$, então:

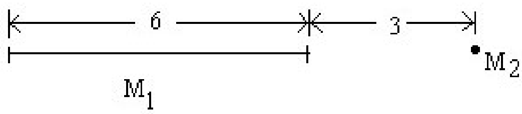
$$\Delta E = \Delta m\, c^2.$$

Sugestão: Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o teorema fundamental do cálculo.

9. Sabe-se que a intensidade da força de atração entre duas partículas é dada por

$$F = \frac{Cm_1m_2}{d^2}$$

onde C é uma constante, m_1 e m_2 são as massas das partículas e d é a distância entre elas. Uma barra linear homogênea de massa $M_1 = 18kg$ e uma massa pontual $M_2 = 2kg$ estão dispostas como na figura. Calcule a intensidade da força de atração entre as duas massas. (Resp.: $\frac{4}{3}C$)



10. Considere a função:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt \qquad \text{para todo } x > 0.$$

Prove que para todo $a > 0$ e $x > 0$ vale:

(a) $F'(x) = \dfrac{1}{x}$

(b) $F(ax) = F(a) + F(x)$

(Observe que poderíamos ter definido a função **logaritmo natural** como sendo essa função F).

11. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)f(t)dt$$

Prove que $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

12. Calcule o seguinte limite, caso exista:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \cos(t^2)dt}{\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt}.$$

(Resp.: 0)

13. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que f é crescente e ímpar.

(b) Mostre que $f(x) \leq f(1) + 1 - \dfrac{1}{x}$, $\forall x \geq 1$.

Sugestão: Integre $0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \dfrac{1}{t^2}$ de 1 a x.

(c) Mostre que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ existe e é um real positivo.

(d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

RESPOSTAS DAS INTEGRAIS INDEFINIDAS

II - Integrais Indefinidas

1) $\dfrac{x^6}{6} + x - \dfrac{1}{x} + k$

2) $\dfrac{e^{2x}}{2} + k$

3) $\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7} + k$

4) $\operatorname{tg} x - x + k$

5) $7 \ln|x-2| + k$

6) $\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + k$

7) $2\sqrt{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{5} - 1\right) + k$

8) $-\ln|\cos x| + k$

9) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos\ x| + k$

10) $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$

11) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + k$

12) $x - \operatorname{arctg} x + k$

13) $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + k$

14) $\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k$

15) $2\sqrt{1+\ln x} + k$

16) $\dfrac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+1)^6} + k$

17) $\ln(2x^2+8x+20) + k$

18) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + k$

19) $\ln|\operatorname{arcsen} x| + k$

20) $\ln(1+e^x) + k$

21) $-\ln(1+\cos^2 x) + k$

22) $\dfrac{1}{3}e^{x^3} + k$

23) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(1+e^x)^4} + k$

24) $-2\cos\sqrt{x} + k$

25) $e^{\operatorname{arctg} x} + k$

26) $2(x+1)^{2005}\left(\dfrac{x+1}{2006} - \dfrac{1}{2005}\right) + k$

27) $-x\cos x + \operatorname{sen} x + k$

28) $\dfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + k$

29) $\begin{cases} \dfrac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \dfrac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + k \text{ se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k \text{ se } r = -1 \end{cases}$

30) $x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + k$

31) $(-x-1)e^{-x} + k$

32) $\dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + k$

33) $x\ \operatorname{arcsen}\ x + \sqrt{1-x^2} + k$

34) $\dfrac{1}{2}\sec\ x\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{2}\ln|\sec\ x + \operatorname{tg} x| + k$

35) $\dfrac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x\cos\ x) + k$

36) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + k$

37) $\dfrac{1}{8}\left(x - \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right) + k$

38) $\ln|1+\operatorname{sen} x| + k$

39) $6\ln|x-1|-25\ln|x-2|+22\ln|x-3|+k$

40) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}\text{arctg}\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{6}}\right)+k$

41) $-22\ln|x-1|+\dfrac{12}{x-1}+25\ln|x-2|+k$

42) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{35}{12}\ln|x-2|+\dfrac{61}{24}\ln\left[1+\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\text{arctg}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+k$

43) $\dfrac{1}{2}\text{arcsen}x-\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+k$

44) $\dfrac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{8}\text{arcsen}x+k$

45) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+k$

46) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+k$

47) $\ln|\sqrt{5-2x+x^2}+x-1|+k$

48) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x-\dfrac{2}{3}\right)+k$

49) $\dfrac{x}{2}\left[\text{sen}(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+k$

50) $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-4|+k$

51) $2\ln|x-1|+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+k$

52) $x\sqrt{a^2+b^2x^2}+\dfrac{a^2}{2b}\ln\left[\dfrac{bx}{a}+\dfrac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}\right]+k$

53) $\dfrac{1}{b}\ln\left[\dfrac{bx}{a}+\dfrac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}\right]+k$

54) $\dfrac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\dfrac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$ +k

55) $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\sqrt{3-2x-x^2}+2\text{arcsen}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+k$

56) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)+k$

57) $\text{sen}x-\dfrac{1}{3}\text{sen}^3x+k$

58) $-\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+k$

59) $\dfrac{\text{sen}^2x}{2}-\dfrac{1}{2\text{sen}^2 x}-2\ln|\text{sen}x|+k$

60) $\dfrac{1}{4}\cos^8\left(\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{1}{3}\cos^6\left(\dfrac{x}{2}\right)+k$

61) $\dfrac{\text{tg}^2x}{2}+3\ln|\text{tg}x|-\dfrac{3}{2\text{tg}^2x}-\dfrac{1}{4\text{tg}^4x}+k$

62) $\dfrac{3x}{8} - \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + k$

63) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - 2\dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + \dfrac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + k$

64) $\dfrac{x}{16} - \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{64} + \dfrac{\operatorname{sen}^3(2x)}{48} + k$

65) $\dfrac{5}{16}x + \dfrac{1}{12}\operatorname{sen}(6x) + \dfrac{1}{64}\operatorname{sen}(12x) - \dfrac{\operatorname{sen}^3(6x)}{144} + k$

66) $-\dfrac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \dfrac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} + k$

67) $\operatorname{tg} x + \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - 2\operatorname{cotg}(2x) + k$

68) $\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + k$

69) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + k$

70) $\dfrac{1}{64}\left(-\dfrac{4}{x} + \dfrac{8 - 2x}{4 + x^2} - 3\operatorname{arctg}(\dfrac{x}{2}) + 4\ln|x| - 2\ln(4 + x^2)\right) + k$

71) $\dfrac{-\operatorname{arctg} x}{x} + \ln|x| - \ln\sqrt{1 + x^2} + k$

72) $\dfrac{3}{2}\operatorname{arcsen}(x - 1) - \left(\dfrac{x + 3}{2}\right)\sqrt{2x - x^2} + k$

73) $2\ln|x + 1| + \ln(x^2 - 2x + 2) + 3\operatorname{arctg}(x - 1) + k.$