

2ª Lista de Exercícios

1-) Dois corredores iniciam uma corrida ao mesmo tempo e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida eles têm a mesma velocidade.

2-) Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:

(a) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

(b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ com } a \geq 1 \text{ e } b \geq 1.$

(c) $\left| \ln \frac{a}{b} \right| \leq |a - b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ com } a \geq 1 \text{ e } b \geq 1.$

(d) $b^b - a^a > a^a(b - a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ com } 1 \leq a < b.$

(e) $e^x - e^y \geq x - y$, para todo x, y com $x > y > 0$.

3-) Seja f uma função derivável em $[0, +\infty[$. Mostre que, se $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \leq 1$, para todo $x > 0$, então $0 < f(x) \leq x, \quad \forall x > 0$.

4-) Mostre que $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ é estritamente decrescente para $x > 0$ e conclua que $(1 + \pi)^e < (1 + e)^\pi$.

5-) Prove as seguintes desigualdades:

(a) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \quad \forall x > 1$

(b) $e^\pi > \pi^e$

(c) $\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} > \frac{b}{a}$ sempre que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

(d) $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad \forall x > 0$

(e) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ se $x > 0$

(f) $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1 + x^2), \quad \forall x > 0$

6-) Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x \neq 0$. Suponha que p seja um ponto de máximo local de g . Prove que $pf'(p) - f(p) = 0$. Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p passa pela origem.

7-) Mostre que a equação $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

8-) Seja $n \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{nx - 1}{nx + 1} \right)^x = 4$. Determine n .

RESP.: $-1/\ln 2$

9-) Calcule, caso exista

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg} \pi x}$ RESP.: 0

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$ RESP.: 0

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x}$ RESP.: 0

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$ RESP.: 0

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^{x^2}}$ RESP.: 0

(f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \ln x, p > 0$ RESP.: 0

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{p}{x} \right)$ RESP.: p

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \right)$ RESP.: $1/6$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$ RESP.: 1

(j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ RESP.: 1

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{1/x}$ RESP.: e^4

(l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$ RESP.: 1

(m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} + \ln x \right]$ RESP.: $+\infty$

(n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$ RESP.: $2/3$

(o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \operatorname{arctg} x}$ RESP.: 1

(p) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ RESP.: e^2

(q) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \operatorname{sen} x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2} \right)$ RESP.: 3

(r) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x \sec x - \sec^2 x)$ RESP.: $-\frac{1}{2}$

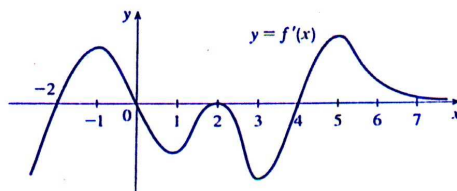
(s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}}$ RESP.: 0

(t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+3x)^{1/\ln x}$ RESP.: e

(u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}]$ RESP.: 1

(v) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$

10-) Seja f uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:



(a) Em que intervalos f é crescente ou decrescente?

(b) Para quais valores de x f tem um máximo ou mínimo local?

(c) Em que intervalos f tem concavidade para cima ou para baixo?

(d) Ache os pontos de inflexão de f .

(e) Assumindo que f seja contínua e que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de f .

11-) Esboce o gráfico das funções abaixo.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$ (b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ (d) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

(e) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$ (f) $f(x) = \left(3 - \frac{6}{x}\right)e^{2/x}$

(g) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$ (h) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

(i) $f(x) = e^x - e^{3x}$ (j) $f(x) = x - 3 \ln x - \frac{2}{x}$

12-) (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(b) Determine, em função de k , o número de soluções da equação $ke^x = x^2$.

RESP.: não há soluções se $k < 0$; uma solução se $k = 0$ ou $k > \frac{4}{e^2}$; duas soluções se $k = \frac{4}{e^2}$; três soluções se $0 < k < \frac{4}{e^2}$.

13-) Achar, caso existam, os valores máximo e mínimo de:

(a) $f(x) = \sin x - \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

RESP.: $-1; \sqrt{2}$.

(b) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

RESP.: $\sqrt{\frac{17}{8}}; \sqrt{3 + \sqrt{\frac{32}{27}}}$.

(c) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.

RESP.: $4; 1$.

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$, $-1 \leq x \leq 2$. (CUIDADO!)

RESP.: $\sqrt[3]{-3}; 0$.

(e) $f(x) = |x^4 - 2x^3|$, $0 \leq x \leq 3$.

RESP.: $0; 27$.

14-) Mostre que a equação $x^3 - 6x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-1, 1]$.

15-) Suponha que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua, $f(0) = 1$ e que $f(x)$ é um número racional para todo $x \in [0, 1]$. Prove que $f(x) = 1$, para todo $x \in [0, 1]$.

16-) (CONSERVAÇÃO DE ENERGIA) Uma partícula de massa m desloca-se sobre o eixo Ox sob ação da força resultante $\vec{F}(x) = f(x)\vec{i}$, onde f é suposta contínua no intervalo J . Seja $V(x)$ uma função derivável definida em J tal que, para todo $x \in J$, $V'(x) = -f(x)$ (diz-se que a força F “deriva do potencial V ”). Seja $x : I \rightarrow J$ a função horária da partícula, definida no intervalo I (i.e. para cada instante $t \in I$, $x(t) \in J$ é a posição da partícula no referido instante). Assuma que o movimento da partícula é governado pela lei de Newton:

$$mx''(t) = f(x(t)).$$

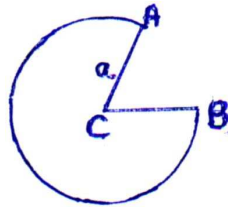
Demonstre que existe uma constante $E \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in I$:

$$\frac{1}{2}mx'(t)^2 + V(x(t)) = E.$$

17-) Prove que se p é um polinômio, a equação $e^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções.

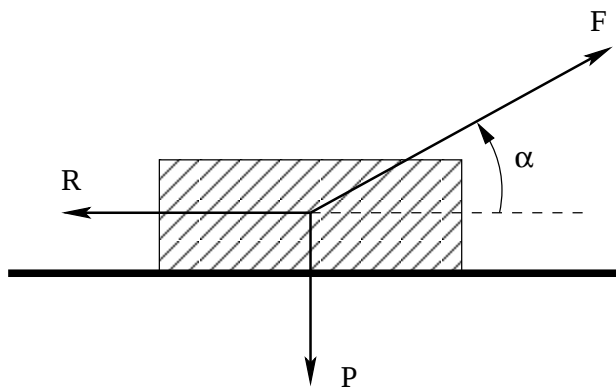
Problemas de otimização: máximos e mínimos

- 1-) Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a $(2,0)$ e $(-2,0)$ é mínima?
RESP.: $(5,0)$ e $(-5,0)$
- 2-) (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?
(b) Por que as latas encontradas no mercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado.
RESP.: (a) 1; (b) $4/\pi$
- 3-) Um canhão situado no solo é posto sob um ângulo de inclinação θ . Seja r o alcance do canhão, isto é, a distância entre o canhão e o ponto de impacto da bola. Então r é dado por $r = \frac{2v^2}{g} \sin \theta \cos \theta$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?
RESP.: $\theta = \frac{\pi}{4}$
- 4-) Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.
RESP.: altura: 4; raio: $2\sqrt{2}$.
- 5-) Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes.
RESP.: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$.
- 6-) Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro?
RESP.: $(1 + \sqrt[3]{4})^{3/2}$.
- 7-) Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB. Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima.
RESP.: $\sqrt{2}$



- 8-) Um corpo de peso P apoiado sobre um plano horizontal deve ser deslocado horizontalmente pela aplicação de uma força de intensidade F . Qual o ângulo α com a horizontal deve formar a força para que a intensidade da mesma necessária para mover o corpo seja mínima, admitindo coeficiente de atrito $\mu > 0$?

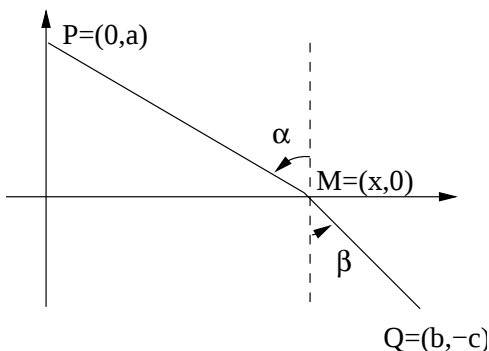
RESP.: $\arctg \mu$



- 9-) (LEI DE REFRAÇÃO DE SNELLIUS) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como consequência do *princípio de Fermat*, segundo o qual “a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso”.

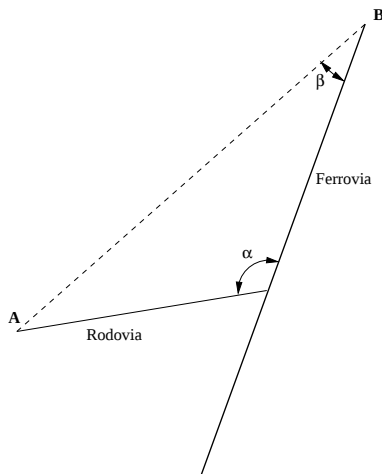
Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos (vide figura abaixo). Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v , também em movimento retilíneo. Seja $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q . Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então:

$$\frac{\sin \alpha}{u} = \frac{\sin \beta}{v}.$$



OBSERVAÇÃO. A *lei da reflexão plana* também pode ser obtida como consequência do mesmo princípio (verifique!).

- 10-) Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica A a uma ferrovia que passa por uma cidade B . Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam m vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo α a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$.
RESP.: $\pi - \arccos(\frac{1}{m})$



- 11-) Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b . Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina?
RESP.: $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$

Complementação Teórica

- 1-) (TEOREMA DE DARBOUX) Sejam f derivável num intervalo I e $a, b \in I$. Prove que, se $d \in \mathbb{R}$ é tal que $f'(a) < d < f'(b)$, então existe c entre a e b tal que $f'(c) = d$. (Atenção: Nada se sabe da continuidade de f' .)

SUGESTÃO. Demonstre primeiro o caso em que $d = 0$.

- 2-) (FORMA FRACA DA REGRA DE L'HÔPITAL) Sejam f e g funções reais a valores reais deriváveis no ponto $a \in \mathbb{R}$, tais que $g'(a) \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0 = g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Demonstre que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Nos dois exercícios seguintes, tem-se por objetivo demonstrar a regra de l'Hôpital para indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ (1ª regra de l'Hôpital).

- 3-) (TEOREMA DE CAUCHY) Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) . Demonstre que existe $c \in (a, b)$ tal que $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$.

SUGESTÃO. Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$. Mostre que F satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle e aplique tal teorema.

- 4-) (1ª REGRA DE L'HÔPITAL) Sejam f, g funções reais a valores reais, deriváveis em $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ (dados $a \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$), com $g'(x) \neq 0$ neste conjunto. Suponha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Então, se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir ou for $\pm\infty$, o mesmo ocorrerá para $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Para demonstrar o teorema acima, complete os detalhes do seguinte roteiro:

- (i) Sem perda de generalidade, pode-se assumir $f, g : (a - \delta, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, i.e. $f(a) = g(a) = 0$ (por quê?).

- (ii) Do item anterior e da hipótese de que $g'(x) \neq 0$ em $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$, segue-se que $g(x) \neq 0$ em $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ (por quê?).
- (iii) Use a questão anterior (teorema de Cauchy) para provar que, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, existe $c(x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

- (iv) Mostre que a função $c : \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida no item anterior é tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} c(x) = a \text{ e que } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f'(y)}{g'(y)} \text{ se o último limite existir ou for } \pm\infty \text{ (por quê?).}$$

- 5-** (FÓRMULA DE TAYLOR DE ORDEM n , COM RESTO DE LAGRANGE) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até ordem $(n + 1)$ e $x_0, x \in I$. Demonstre que existe c entre x_0 e x (i.e. $x_0 < c < x$ ou $x < c < x_0$) tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

SUGESTÃO. Suponha $x_0 < x$ (se $x < x_0$, o argumento é análogo). Tome $F : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(\forall y \in [x_0, x]) F(y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k - A(x - y)^{n+1}$, onde $A \in \mathbb{R}$ é escolhido de forma que $F(x_0) = 0$ (prove que existe tal A). Verifique que F satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle, e aplique tal teorema.

OBSERVAÇÃO. O teorema acima fornece uma fórmula para o resto da aproximação de f pelo seu polinômio de Taylor de ordem n , em termos da derivada $(n + 1)$ -ésima de f . Assim, se for possível estimar superiormente o módulo de tal derivada em I , o teorema pode ser aplicado para se obter uma estimativa superior do módulo do referido resto, o que é freqüentemente útil em cálculos aproximados.