MAT111 - Cálculo Diferencial e Integral I
P2 - 30 de maio de 2014
Professor: Gláucio Terra

Questão **1.** (3 ptos.)

(a) *Mostre que* $f(x) = (1+x)^{1/x}$ *é estritamente decrescente em* $(0,\infty)$ *e conclua que* $(1+\pi)^e < (1+e)^\pi$.

(b) *Mostre que a equação* $3x - 2 + \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$ *tem exatamente uma raiz real.*

Resposta:

(a) Feito em aula.

(b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x-2+\cos(\frac{\pi x}{2})$. A referida função é derivável e sua derivada é dada por $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3 - \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})$. Como $|\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})| \leqslant \frac{\pi}{2} < 3$, segue-se que f' é estritamente positiva. Assim, por um corolário do teorema do valor médio, f é estritamente crescente, logo injetiva, portanto tem no máximo uma raiz. Por outro lado, como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (pois $\lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$ e $-2+\cos(\frac{\pi x}{2})$ é limitada), existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) > 0$; analogamente, como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) < 0$. Pelo teorema do valor intermediário (o qual pode ser aplicado, pois f é uma função contínua definida num intervalo), f tem uma raiz entre x_0 e x_1.

Questão **2.** (2 ptos.) *Calcule, caso exista:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x \operatorname{arctg} x}$

Resposta:

(a) Para $x \in (0,1)$, $(\operatorname{sen} x)^{1/\ln x} = \exp\big(\frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln x}\big)$. Tomando-se $f, g : (0,1) \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \ln \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \ln x$, tem-se:

1. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ (pelo teorema sobre limites de funções compostas) e $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$.
2. f e g são deriváveis e suas derivadas são dadas, respectivamente, por $f'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ e $g'(x) = \frac{1}{x}$. Portanto, $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$, donde, pela continuidade do cosseno, pelo limite trigonométrico fundamental e pela regra do quociente para limites, conclui-se que existe $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$.
3. Por (1) e (2) e pela regra de l'Hôpital, conclui-se que existe $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
4. Por (3) e pela continuidade da função exponencial, conclui-se que existe $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x} = e$.

(b) Tomando-se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \ln(1+x^2)$ e $g(x) = x \operatorname{arctg} x$, tem-se:

1. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (pois f é contínua, por ser a composta de funções contínuas) e $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (pois g é contínua, por ser o produto de funções contínuas).
2. f e g são deriváveis (usando-se a regra da cadeia para f e a regra de Leibnitz para g) e suas derivadas são dadas, respectivamente, por $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ e $g'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$. Portanto, $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x + x}$.

3. Tomando-se $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $F(x) = 2x$ e $G(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x + x$, tem-se $\lim_{x\to 0} F(x) = 0 = \lim_{x\to 0} G(x)$. Além disso, F e G são deriváveis e $F'(x) = 2$, $G'(x) = 1 + 2x \operatorname{arctg} x + 1 = 2 + 2x \operatorname{arctg} x$; portanto, $\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{2}{2+2x\operatorname{arctg} x}$ tem limite no zero igual a 1.

4. Por (1),(2) e (3), e por duas aplicações da regra de l'Hôpital, conclui-se que existe $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \operatorname{arctg} x} = 1$.

Questão **3.** (2,5 ptos.) *Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$, determinando explicitamente: os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente, os intervalos nos quais a função tem concavidade para cima ou para baixo, os limites e assíntotas em $\pm\infty$, caso existam.*

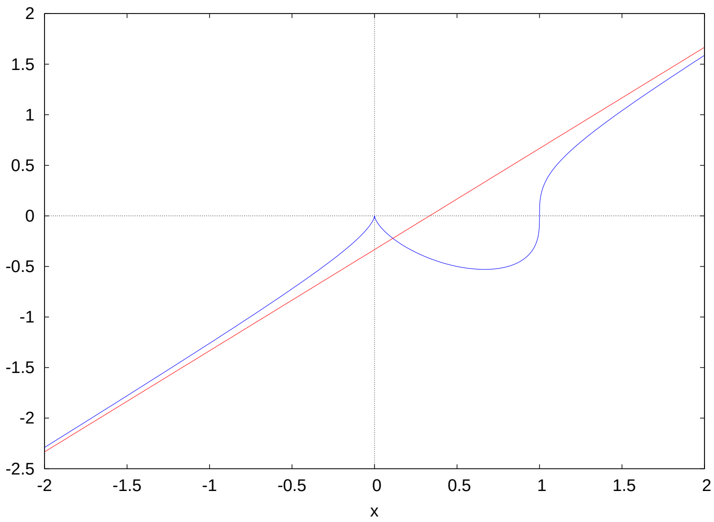
Resposta:

1. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e (aplicando-se l'Hôpital) $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - x] = -1/3$. Portanto, $y = x - 1/3$ é assíntota em $+\infty$ e em $-\infty$.

2. Pela regra da cadeia e pela regra de Leibnitz, f é derivável até ordem 2 em $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e suas derivadas primeira e segunda são dadas, respectivamente, por $f'(x) = \frac{3x^2-2x}{3(x^3-x^2)^{2/3}}$ e $f''(x) = -\frac{2x^2}{9(x^3-x^2)^{5/3}}$. Além disso, $\lim_{x\to 1} f'(x) = +\infty$ (portanto, pela regra de l'Hôpital, f não é derivável no 1), $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ (portanto, pela regra de l'Hôpital, f não é derivável no 0) e $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty$.

3. Analisando-se os sinais de f' e f'', e aplicando-se o teorema do valor médio, conclui-se que:
   (a) f é estritamente crescente nos intervalos $(-\infty, 0]$ e $[2/3, +\infty)$; f é estritamente decrescente no intervalo $[0, 2/3]$.
   (b) f tem concavidade para cima nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, 1)$; f tem concavidade para baixo no intervalo $(1, +\infty)$.

4. Levando-se em conta os itens acima, conclui-se que o gráfico de f é conforme esboçado abaixo:



Questão **4.** (2,5 ptos.) *Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes.*

RESPOSTA: Sejam $r \geqslant 0$ o raio da esfera e $l \geqslant 0$ o lado do cubo. A soma das áreas de suas superfícies é dada por:

$$A = 6l^2 + 4\pi r^2 = 2$$

Soma dos volumes:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + l^3$$

Fazendo $6l^2 = 2 - 4\pi r^2$, temos $l = \sqrt{\frac{2-4\pi r^2}{6}}$. Assim, o problema se reduz a encontrar (caso existam) os pontos de máximo e mínimo da função $V : [0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \Big(\frac{1-2\pi r^2}{3}\Big)^{3/2}$$

Como V é contínua e está definida no intervalo fechado e limitado $[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$, pelo teorema de Weierstrass conclui-se que existem pontos de máximo e de mínimo de V no referido intervalo. Além disso, como V é derivável, segue do teorema de Fermat que, se um destes pontos não for extremidade do intervalo, deverá ser um ponto crítico de V no interior do mesmo. Conclusão: V tem pontos de máximo e mínimo no intervalo $[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$, e tais pontos pertencem ao conjunto formado pelas extremidades do intervalo e pelos pontos críticos de V no interior do mesmo.

A função derivada de V, $V' : [0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}] \to \mathbb{R}$, é dada por:

$$\begin{aligned} V'(r) &= 4\pi r^2 - 2\pi r\sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}} = \\ &= 2\pi r\Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big) \end{aligned}$$

Para encontrar os pontos críticos de V, observe que $2\pi r\Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big) = 0$ se, e somente se, $r = 0$ ou $2r = \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}$, i.e. se, e somente se $r = 0$ ou $r = \frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$. Assim, os pontos críticos de V são 0 e $r_0 \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi+12}} \in (0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$.

Além disso, como 0 e r_0 são os únicos zeros de V', e como V' é contínua, segue do teorema do valor intermediário que V' deve ter sinal constante nos intervalos $(0, r_0)$ e $(r_0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$. Mas $V'(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = 2 > 0$, e $\lim_{r\to 0}\Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big) = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$ (portanto $2\pi r\Big(2r - \sqrt{\frac{1-2\pi r^2}{3}}\Big)$ tem sinal negativo para $r > 0$ e próximo de zero), o que nos permite concluir que V' tem sinal negativo em $(0, r_0)$ e positivo em $(r_0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$. Logo, pelo teste da derivada primeira, $r_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$ é o ponto de mínimo de V.

Por outro lado, temos: $V(0) = \sqrt{\frac{1}{27}}$ e $V(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = \sqrt{\frac{1}{9\frac{\pi}{2}}}$. Como $\pi < 4$, tem-se $\frac{\pi}{2} < 2$, logo $9\frac{\pi}{2} < 27$, donde $\frac{1}{9\frac{\pi}{2}} > \frac{1}{27}$, o que implica $V(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) > V(0)$. Assim, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ é o ponto de máximo de V.